TD 3

$Y = K^{\alpha}L^{1-\alpha}$ $\delta = 1$ $\frac{L_{t+1}}{L_t} = 1+n$, $U(C_t, C_{t+1}) = C_t\, C_{t+1}^{B}$

1) Condition définissant le sentier de conso de la période 1 et 2

Période 1 : $C_t = W_t - S_t$ (1)

Période 2 : $C_{t+1} = (1+r_t+1)S_t$ (2)

(2) $S_t = C_{t+1}(1+r_t+1)^{-1}$ (3)

(3) dans (1) : $C_t = W_t - C_{t+1}(1+r_t+1)^{-1}$

D'où $C_t + C_{t+1}(1+r_{t+1})^{-1} = W_t$ Contrainte Budg intertemporelle

Max du programme de conso

$$\begin{cases} \text{Max } U(C_t, C_{t+1}) \\ \text{Sc} : C_t + C_{t+1}(1+r_{t+1})^{-1} = W_t \end{cases}$$

$\mathcal{L}(C_t, C_{t+1}, \lambda) = U(C_t, C_{t+1}) - \lambda(C_t + C_{t+1}(1+r_{t+1})^{-1} - W_t)$

CPO
$$\begin{cases} \frac{d\mathcal{L}}{dC_t} = 0 \\ \frac{d\mathcal{L}}{dC_{t+1}} = 0 \\ \frac{d\mathcal{L}}{d\lambda} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} C_{t+1}^{B} - \lambda = 0 \\ BC_t C_{t+1}^{B-1} - \lambda(1+r_{t+1})^{-1} = 0 \\ C_t + C_{t+1}(1+r_{t+1})^{-1} - W_t = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = C_{t+1}^{B} & (4) \\ \lambda = BC_t C_{t+1}^{B-1}(1+r_{t+1}) & (5) \\ C_t + C_{t+1}(1+r_{t+1})^{-1} = W_t & (6) \end{cases}$$

$\to / C_{t+1}^{B-1}$

(4) = (5) $C_{t+1}^{B} = BC_t C_{t+1}^{B-1}(1+r_{t+1})$ $\quad C_{t+1} = BC_t(1+r_{t+1})$ (7)

(7) dans (6) $C_t + BC_t(1+r_{t+1})(1+r_{t+1})^{-1} = W_t$ d'où $C_t + BC_t = W_t$

$C_t = \frac{1}{1+B} W_t$ (8) C_t dépend de W_t, alors il s'agit d'une fonc de conso Keynésienne

(8) dans (1) $\frac{1}{1+B} W_t = W_t - S_t$ $\quad S_t = W_t - \frac{1}{1+B} W_t$ on divise par $(1+B)$ X

D'où la fonc d'épargne : $S_t = \frac{B}{1+B} W_t$ S_t dépend de W_t

De (9) et (2) $C_{t+1} = \frac{B(1+r_{t+1})}{1+B} W_t$

Equation dynamique du modèle $K_{t+1}(K_t)$

$K_{t+1} = L_t S_t$ or $\frac{L_{t+1}}{L_t} = 1+n \iff L_t = \frac{L_{t+1}}{1+n}$

$K_{t+1} = \frac{L_{t+1}}{1+n} S_t \iff \frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} = \frac{1}{1+n} S_t$ $\quad k_{t+1} = \frac{1}{1+n} S_t$

$k_{t+1} = \frac{1}{1+n} S_t$ or $S_t = \frac{B}{1+B} W_t$ $\quad k_{t+1} = \frac{B}{(1+n)(1+B)} W_t$ (10)

Modèle en situation de CCP : facteurs rému à leur pm

Ainsi on a $PmL = W_t$

$PmL = \frac{dY}{dL}$ $\quad PmL = (1-\alpha)K^{\alpha}L^{-\alpha}$ $\quad PmL = (1-\alpha)\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} = (1-\alpha)k_t^{\alpha}$

$W_t = (1-\alpha)k_t^{\alpha}$ (11) $\quad$ (11) dans (10) $k_{t+1} = \frac{B(1-\alpha)}{(1+n)(1+B)} k_t^{\alpha}$ Equation dynamique.

3) Valeur d'état stationnaire du capital/t

A l'état stationnaire, le tx de croiss du K/t est nul D'où $k_t = k_{t+1}$

$k_t = \frac{B(1-\alpha)}{(1+n)(1+B)} k_t^{\alpha}$ $\quad k_t^{1-\alpha} = \frac{B(1-\alpha)}{(1+n)(1+B)}$ $\quad$ D'où $k_t^{*} = \left[\frac{B(1-\alpha)}{(1+n)(1+B)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$

4) Valeur du capital/t correspondant à la règle d'or

La fonction de conso ds le modèle de Solow : $C_t = K_t^{\alpha} - (1+n)K_t$

$$\text{Max } C_t \Rightarrow C_t'(K_t) = 0, \quad C''(K_t) < 0$$

$$\alpha K_t^{\alpha-1} - (1+n) = 0 \qquad K_t^{OR} = \left[\frac{\alpha}{1+n}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} * \ \frac{B(1-\alpha)}{1+B} > \alpha \\ B(1-\alpha) > \alpha(1+B) \\ \frac{B(1-\alpha)}{1+B} > \alpha \\ \frac{B}{1+B} > \frac{\alpha}{1-\alpha} \end{array} \right.$$

5) Condition pour que $K_t^* > K_t^{OR}$: $\left[\frac{B(1-\alpha)}{(1+n)(1+B)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} > \left[\frac{\alpha}{1+n}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$

$$\frac{B(1-\alpha)}{(1+n)(1+B)} > \frac{\alpha}{1+n}$$

$*$ D'où $K_t^* > K_t^{OR}$ ssi $\frac{B(1-\alpha)}{(1+n)(1+B)} > \frac{\alpha}{1-\alpha}$

Si cette condition est vérifiée, alors le K/t est trop élevé. Il est possible d'↗ la conso de tous les ind à ttes les périodes en trouvant un arrangement qui réduise l'S des jeunes et l'acc de K. L'État pourrait par ex décider de prélever une unité de bien à chq jeune pour leur donner (1+n) à chq vieux répétant cela à ttes les périodes suivantes. Cette propriété du modèle à générations imbriquées est liée à sa structure particulière et à l'incomplétude du système de marché qu'elle implique (certaines transaction (entre gé) qui seraient profitables à l'ensemble des ind ne peuvent avoir lieu