# Dossier 8 : Taux de change d'équilibre

## Exercice : taux de change et équilibre inter-temporel

On considère une économie ouverte à 2 biens : un bien échangé (E) et un bien non-échangé (N). On note :
- $Y_E$ et $Y_N$ : les productions sont notées
- $C_E$ et $C_N$ : les consommations
- $P_E$ et $P_N$ : les prix
- $N = P_N/P_E$ le prix relatif du bien non-échangé par rapport au bien échangé
- X : les exportations nettes (exportations moins importations)
- $P_E = P_E^*/S$ : la loi du prix unique (où S est le taux de change et P* le prix étranger) s'applique au bien échangé

### EQUILIBRE STATIQUE

**1. Ecrire l'équilibre des marchés, puis le revenu national Y en utilisant le bien échangé comme numéraire.**

- Sur un marché, l'équilibre est défini par : offre = demande
- Sur le **marché des biens échangeables**, l'équilibre est atteint lorsque la production égalise la consommation intérieure et extérieure donc les exportations nettes sont prises en compte : $Y_E = C_E + X$
- Sur le **marché des biens non échangeables**, l'équilibre est atteint lorsque la production égalise la consommation intérieure uniquement puisque les biens ne sont pas échangés à l'international : $Y_N = C_N$
- Sachant le bien échangeable numéraire, l'équilibre sur le **marché des 2 biens** s'écrit :
  $Y = Y_E P_E + Y_N P_N = Y_E + N.Y_N \iff Y = C_E + X + N.C_N$

**Quelle est la maximisation de cette utilité sous contrainte de revenu ? On suppose que le revenu national est entièrement distribué aux ménages. On veut montrer que la maximisation de cette utilité sous contrainte de revenu implique que : $\frac{C_E}{C_N} = \frac{\gamma}{1-\gamma} N$ (1) avec $0<\gamma<1$**

- L'utilité des consommateurs est donnée par : $U = \gamma \log C_E + (1-\gamma)\log C_N$
- $\gamma$ représente les préférences des consommateurs pour le bien E par rapport au bien N
- Sachant le bien échangeable numéraire, on peut écrire la contrainte de revenu en valeur : $C_E + N.C_N \leq Y - X$

- On cherche $\max_{\{CE,CN\}} Y(C_E, C_N)$ tel que revenu disponible après exportation : $Y - X \geq C_E + N.C_N$
- On doit résoudre la fonction Lagrangienne :
  $\Rightarrow L(C_E, C_N, \lambda) = \gamma \log C_E + (1-\gamma)\log C_N + \lambda\,(Y - X - NC_N + C_E)$

$$\Rightarrow \text{CPO} : \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial C_E} = 0 \iff \frac{\gamma}{C_E} - \lambda = 0 \iff C_E = \frac{\gamma}{\lambda} \\ \frac{\partial L}{\partial C_N} = 0 \iff \frac{1-\gamma}{C_N} - N\lambda = 0 \iff C_N = \frac{1-\gamma}{N\lambda} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \iff Y - X - NC_N + C_E = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \boxed{\frac{C_E}{C_N} = \frac{\gamma}{\lambda}.\frac{N\lambda}{1-\gamma} = \frac{\gamma}{1-\gamma} N}$$

$$\Rightarrow \text{CSO} : \begin{cases} \frac{\partial 2L}{\partial C_E} < 0 \iff \frac{-\gamma}{C_E^2} < 0 \\ \frac{\partial 2L}{\partial C_N} < 0 \iff \frac{\gamma-1}{C_N^2} < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{CQFD}$$

- **CCL** : Si N baisse, $C_E/C_N$ baisse. En d'autres termes, si le prix du bien N baisse relativement par rapport au bien E alors le consommateur préférera relativement plus le bien N au bien E.

**Quelle est la part de la demande intérieure agrégée Y-X allouée à la consommation de chacun des deux biens ?**

- D'après la question 1 : $Y = C_E + X + N.C_N \iff Y - X = C_E - N.C_N$ **(i)**
- Avec le programme de maximisation, on a trouvé : $\frac{C_E}{C_N} = \frac{\gamma}{1-\gamma} N \iff \begin{cases} C_E = \frac{\gamma}{1-\gamma} N.C_N \\ C_N = \frac{1-\gamma}{N\gamma} C_E \end{cases}$ **(ii)**
- Ensuite, pour trouver $C_N$, on remplace $C_E$ par l'équation trouvée **(ii)** dans l'équation **(i)** :
  $\Rightarrow Y - X = C_E - N.C_N$
  $\Rightarrow Y - X = \frac{\gamma}{1-\gamma} N.C_N - N.C_N$
  $\Rightarrow C_N = \frac{1-\gamma}{N}(Y - X)$ **(iii)**

- Pour trouver $C_E$ on remplace $C_N$ par l'équation trouvée précédemment **(iii)** :
  $\Rightarrow C_E = (Y - X) - N.C_N$
  $\Rightarrow C_E = (Y - X) - \frac{1-\gamma}{N}(Y - X)$
  $\Rightarrow C_E = \gamma(Y - X)$

**2. On suppose que les facteurs de production sont alloués en proportions rigides aux deux secteurs de sorte que $Y_N = \theta Y_E$. Quel est le solde commercial en proportion de $Y_E$ ?**

- D'après la question 1 : $Y_E = C_E + X \Rightarrow X = Y_E - C_E \Rightarrow X = Y_E - \gamma(Y - X)$
- De même, on a : $Y_E = CE + X$
- D'où finalement : $Y_E = \gamma Y - (1-\gamma)X$

**On veut montrer que le solde commercial en proportionde $Y_E$ s'écrit :$\frac{X}{Y_E} = \frac{1-\gamma(1+\theta N)}{1-\gamma}$ (2)**

- D'après la question 1 : $Y_N = C_N = \frac{1-\gamma}{N}(Y - X)$
- On suppose que $Y_N = \theta Y_E \Leftrightarrow Y_E = \frac{1-\gamma}{N\theta}(Y - X)$ car $Y_N = \frac{1-\gamma}{N}(Y - X)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{Y_E} = \frac{N\theta}{(1-\gamma)(Y-X)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{X}{Y_E} = \frac{XN\theta}{(1-\gamma)(Y-X)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{X}{Y_E} = \frac{YE.N\theta - \gamma(Y-X).N\theta}{(1-\gamma)(Y-X)} \quad \text{car } X = Y_E - \gamma(Y - X)$$
$$\Leftrightarrow \frac{X}{Y_E} = \frac{\frac{1-\gamma}{N\theta}(Y-X).N\theta - \gamma(Y-X).N\theta}{(1-\gamma)(Y-X)} \quad \text{car } Y_E = \frac{1-\gamma}{N\theta}(Y - X)$$
$$\Leftrightarrow \frac{X}{Y_E} = \frac{1-\gamma - \gamma.N\theta}{(1-\gamma)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{X}{Y_E} = 1 - \frac{\gamma.N\theta}{(1-\gamma)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\mathbf{X}}{\mathbf{Y_E}} = \frac{\mathbf{1-\gamma(1+\theta N)}}{\mathbf{1-\gamma}} \quad \text{CQFD}$$

On voit que X et N sont négativement reliés (car le coefficient de N est $\frac{-\gamma\theta}{1-\gamma} < 0$)

**Quel est l'impact d'une baisse de Q sur le solde commercial? Expliquer.**

Si l'on considère Q comme étant N, soit le prix relatif du bien non-échangé par rapport au bien échangé, alors une baisse de N fait augmenter la balance commerciale et cela passe par la **réallocation de la consommation effective**. Une baisse du prix du bien N déplace la demande du bien E vers le bien N et l'équilibre sur le marché du bien E se fait grâce à une hausse des exportations nettes.

Attention ! La hausse de la balance commerciale ne passe pas par une compétitivité prix du fait de la LPU ! il ne peut pas y avoir concurrence.

**3. On suppose $\gamma$ = 0,25 et $\theta$ = 3. Exprimer $X/Y_E$, $Y_E/Y$ et $X/Y$ en fonction de N. Quelle est la valeur de ces ratios pour N=1 et pour N=1,3 ? Quelle serait la variation de N nécessaire pour ramener le déficit américain de 6% du PIB à zéro ? Expliquer.**

- On a trouvé : $\frac{X}{Y_E} = \frac{1-\gamma(1+\theta N)}{1-\gamma} \rightarrow \frac{X}{Y_E} = \frac{0,75-0,75N}{0,75} = 1\text{-}N$
- Comme $Y = Y_E + N.Y_N$ et $Y_N = \theta Y_E$ alors : $\frac{Y_E}{Y} = \frac{1}{1+N\theta} = \frac{1}{1+3N}$
- De même : $\frac{X}{Y} = \frac{X}{Y_E} . \frac{Y_E}{Y} = \frac{1-N}{3N+1}$

| | $\frac{X}{Y_E}$ | $\frac{Y_E}{Y}$ | $\frac{X}{Y}$ |
|---|---|---|---|
| N = 1 | 0 | 0,25 | 0 |
| N=1,3 | -0,3 | 0,20 | -6,1 % |

Pour ramener le solde commercial du PIB américain de -6% à zéro, il faut faire baisser N de -23% $\left(= \frac{1-1,3}{1,3}\right)$
La part de revenu dépensé en bien non échangeable diminue en valeur mais la consommation du bien N reste constante en volume. En termes de bien échangé, la consommation diminue en volume mais augmente en valeur.

**4. A moyen terme, les prix peuvent être considérés comme flexibles. En supposant que la banque centrale maintient l'indice des prix à la consommation constant, montrer que l'élasticité du taux de change nominal (S) au prix relatif du bien non- échangeable (N) est 0,75.**

- On note $P = P_E^{1/4}.P_N^{3/4}$ l'indice des prix à la consommation que l'on suppose <u>constant</u>
- On veut exprimer P en fonction de N : $P = P_E^{1/4}.P_N^{3/4} = P_E^{1/4}.\frac{P_E^{3/4}}{P_E^{3/4}}.P_N^{3/4} = P_E.N^{3/4}$
- De même on aura : $P* = P_E*.N^{\frac{3}{4}}$
- On sait que : $Q = \frac{P}{SP*} = \frac{P_E.N^{\frac{3}{4}}}{SP_E*.N^{3/4}}$.
- Or d'après la LPU : $\frac{P_E}{SP_E*} = 1 \rightarrow Q = \frac{N^{3/4}}{N^{3/4}}$
- On peut donc exprimer S en fonction de P : $S = \frac{PN*^{-3/4}}{P*}.N^{3/4}$
- On cherche que l'élasticité de S par rapport à N : $\frac{\partial S/S}{\partial N/N}$
- Or on sait que P est constant donc : $\frac{\partial S/S}{\partial N/N} = 0{,}75$
- Si mon prix relatif augmente de 1% mon taux de change nominal baisse de 0 ,75%

**Calculer la Δ du taux de change nominal nécessaire pour ramener le déficit commercial de 6% du PIB à zéro.**

- Comme $\partial S/S = 0{,}75\ \partial N/N$
- Alors : $Var(S) = \frac{csteN_f^{3/4} - csteN_i^{-3/4}}{csteN_i^{-3/4}} = \frac{1-1{,}3^{-3/4}}{1{,}3^{-3/4}} = 17{,}8\%$

CCL : Pour ramener le déficit de 6% du PIB à zéro, le taux de change nominal devra se déprécier de 17,8%.
Pour conclure, le déficit est comblé non pas par effet compétitivité prix mais par un effet de réallocation en déplaçant la demande interne du bien échangeable vers le bien non-échangeable.

En pratique cet effet de réallocation de la demande interna va se combiner à l'effet compétitivité prix puisque la loi du prix unique n'est pas valable.

## EQUILIBRE INTER-TEMPOREL

**5. On étend maintenant le modèle à deux périodes. On suppose que les consommateurs ont accès au marché financier au taux d'intérêt mondial exogène r. Que représente le coefficient β ?**

- La fonction d'utilité inter-temporelle s'écrit : $V = U^1 + \beta U^2$ **(3)**
- Comme dans le cas statique, on a $U' = \gamma \log C'_E + (1-\gamma)\log C'_N$
- $\beta$ est un facteur d'escompte, l'inverse de la préférence pour le présent

**Quelle est la contrainte budgétaire inter-temporelle ?**

- On sait que Ω est le revenu inter-temporel ($\Omega = Y_1 + \frac{Y_2}{1+r}$)
- La contrainte en période 1 : $N^1C_N^1 + C_E^1 = Y_1 + \beta$
- La contrainte en période 2 : $N^2C_N^2 + C_E^2 + \beta(1+r) = Y_2$
- Donc la contrainte budgétaire inter-temporelle: $N^1C_N^1 + C_E^1 + \frac{N^2C_N^2 + C_E^2}{1+r} = \Omega$ **(4)**

**Qu'implique l'optimum inter-temporel ?**

- On veut montrer que l'optimum inter-temporel implique : $\frac{C_N^2}{C_N^1} = \beta(1+r)\frac{N^1}{N^2}$ et $\frac{C_E^2}{C_E^1} = \beta(1+r)$
- On utilise un programme de maximisation par Lagrange
- On cherche $\max_{\{C_E^1, C_N^1, C_E^2, C_N^2\}} V(C_E^1, C_N^1, C_E^2, C_N^2)$ telle que $N^1C_N^1 + C_E^1 + \frac{N^2C_N^2 + C_E^2}{1+r} \leq \Omega$
- La fonction Lagrange est : $L = \gamma \log C_E^1 + (1-\gamma)\log C_N^1 + \beta[\gamma \log C_E^2 + (1-\gamma)\log C_N^2] + \lambda\left(\Omega - N^1C_N^1 - C_E^1 - \frac{N^2C_N^2 + C_E^2}{1+r}\right)$

- CPO : $\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial C_E^1} = 0 \Leftrightarrow \frac{\gamma}{C_E^1} = \lambda \\ \frac{\partial L}{\partial C_N^1} = 0 \Leftrightarrow \frac{1-\gamma}{C_N^1} = \lambda N^1 \\ \frac{\partial L}{\partial C_E^2} = 0 \Leftrightarrow \beta \frac{\gamma}{C_E^2} = \frac{\lambda}{1+r} \\ \frac{\partial L}{\partial C_N^2} = 0 \Leftrightarrow \beta \frac{1-\gamma}{C_N^2} = \lambda \frac{N^2}{1+r} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{\gamma}{C_E^1} & \text{(i)} \\ \lambda = \frac{1-\gamma}{N^1 C_N^1} & \text{(ii)} \\ \lambda = \beta \frac{(1+r)\gamma}{C_E^2} & \text{(iii)} \\ \lambda = \beta \frac{(1+r)(1-\gamma)}{N^2 C_N^2} & \text{(iv)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{C_E^2}{C_E^1} = \beta(1-r) & \text{avec (i)et (ii)} \\ \frac{C_N^2}{C_N^1} = \frac{N^1}{N^2}\beta(1-r) & \text{avec (i)et (iii)} \end{cases}$

- CSO : ok…

**Interpréter ces deux relations.**

Condition intra-temporelle : $\begin{cases} \frac{C_E^1}{C_N^1} = \frac{\gamma}{1-\gamma} N^1 \\ \frac{C_E^2}{C_N^2} = \frac{\gamma}{1-\gamma} N^2 \end{cases}$

⇒ L'allocation intra-temporelle des 2 biens dépend des prix relatifs des 2 biens à chaque période.

Condition inter-temporelle : $\begin{cases} \frac{C_E^2}{C_E^1} = \beta(1-r) \\ \frac{C_N^2}{C_N^1} = \frac{N^1}{N^2}\beta(1-r) \end{cases}$

⇒ Plus β est faible, plus la préférence pour le présent est élevée et inversement. Si le prix relatif de N est plus élevé en période 1 qu'en période 2, logiquement la consommation va se déplacer de la période 1 vers la période 2.

**Montrer que, si $Y_N$ et $Y_E$ ne varient pas au cours du temps, alors il y a un déficit commercial en période 1 si $\beta < \frac{1}{1+r}$. Comment évolue le prix relatif du bien non-échangeable entre les deux périodes ? Expliquer.**

On suppose que :
- $Y_N^1 = Y_N^2 = Y_N$
- $Y_E^1 = Y_E^2 = Y_E$
- B (1+r) < 1

Ainsi on constate que :
- Pour le bien E : $\frac{C_E^2}{C_E^1} = \beta(1-r) < 1 \Rightarrow C_E^2 < C_E^1$
- Pour le bien N : $\frac{C_N^2}{C_N^1} = \frac{N^1}{N^2}\beta(1-r) \Rightarrow C_N^2 =$

D'où la conclusion :
- Pour le bien E : l'idée est que on consomme moins en période 2 qu'en période 1 alors que la production reste la même dans les deux périodes. Ainsi à la période 1 on a un déficit commercial et en période 2 on aura un excédent commercial
- Pour le bien N : le prix relatif du bien N va baisser en période 2 pour compenser la préférence pour le présent et maintenir la consommation du bien N constante en volume

Remarque : si on considère un grand pays, un déficit commercial important entraînera une hausse de la demande mondiale donc une hausse du taux d'intérêt r et cela atténuera l'incitation à consommer en période 1.

**Conclusion du TD**

Le taux de change n'est pas seulement influencé par la compétitivité prix ou l'effet volume montré dans la condition Marshall-Lerner. Le taux de change est également influencé par un autre canal celui de l'allocation de la demande intérieure dans une approche inter-temporelle de la balance des paiements.