

TD 2

Exercice 1

• $Y = AK^\alpha L^\beta$ $\frac{dY}{dK} = A\alpha K^{\alpha-1} L^\beta = \frac{A\alpha K^\alpha L^\beta}{K} = \alpha \frac{Y}{K}$

• $\frac{dY}{dL} = \beta L^{\beta-1} AK^\alpha = \frac{\beta L^\beta AK^\alpha}{L} = \beta \frac{Y}{L}$

* α et β quand les rendements sont constants soit $\alpha + \beta = 1$
 les rendements sont constants si :

$F(K, L) = \lambda Y$

$F(K, L) = \lambda Y \rightarrow A(\lambda K)^\alpha (\lambda L)^\beta = \lambda Y$ $\lambda^{\alpha+\beta} (AK^\alpha L^\beta) = \lambda Y$
 $\lambda^{\alpha+\beta} Y = \lambda Y$ $\lambda^{\alpha+\beta} = \lambda$ $\lambda^{\alpha+\beta-1} = 1$ $\alpha + \beta - 1 = 0$ car $\lambda > 1$

$F(K, L) = \lambda Y$ $\alpha + \beta = 1$ Pour que les admts soient constants, faudrait que $\alpha + \beta = 1$

Exercice 2

① $Y_t = K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}$ $Y = \frac{Y}{L}$ $K = \frac{K}{L}$ $0 < \alpha < 1$

$Y = f(K) = \frac{Y}{L}$ $\frac{Y}{L} = \frac{K^\alpha L^{1-\alpha}}{L} = \frac{K^\alpha}{L^\alpha}$ $Y = \left(\frac{K}{L}\right)^\alpha = (K)^\alpha = f(K)$

② On cherche $\frac{K'}{K}$ $K = sY - \delta K$ $K = \frac{K}{L}$

• $\ln K = \ln \frac{K}{L}$ $\ln K = \ln K - \ln L$ $\frac{K'}{K} = \frac{K'}{K} - \frac{L'}{L}$

• $\frac{K'}{K} = \frac{sY - \delta K}{K} - m$ $\frac{K'}{K} = \frac{sY}{K} - \frac{\delta K}{K} - m = \frac{sY}{K} - \delta - m$

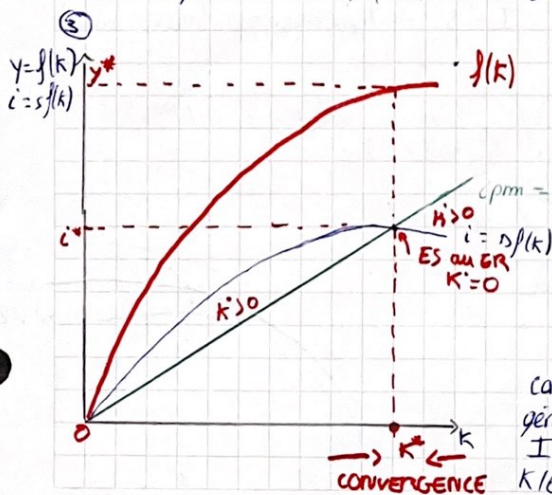
• $\frac{K'}{K} = \frac{s(K^\alpha L^{1-\alpha})}{K} - \delta - m$ $\frac{K'}{K} = sK^{\alpha-1} L^{1-\alpha} - \delta - m = s \frac{K^{\alpha-1}}{L^{\alpha-1}} - \delta - m$

• $\frac{K'}{K} = s \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha-1} - \delta - m$ $\frac{K'}{K} = sK^{\alpha-1} - \delta - m$ $K' = sK^\alpha - (\delta + m)K = sf(K) - (\delta + m)K$

$\rightarrow K' = sf(K) - (\delta + m)K$ traduit l'équation dynamique fondamentale du modèle qui définit la Δ du K/t en fonction du montant du K/t atteint à l'instant t .

$K' = i - (\delta + m)K$ cette Δ dépend de l'écart entre la f' d'i.e. $i = sf'(K)$ et f' ipm (= $(\delta + m)K$) qui permet de préserver un niv de K/t donné en compensant la dépréciat° du K (destruit due à l'usage δ) et la dilut° de K (bourse liée à m)

$I = S = sY$



• Si le K/t de l'éco < à celui de ES alors $i > ipm$ $K' > 0$
 K va vers son niveau ES et vice-versa
 ce mécanisme est possible grâce à la pmf décroissante

④ Si stock de K/t < valeur à l'ES alors $i > ipm$ alors ya croissance du K/t mais comme pmf décroissante : le rev supp et I supp géminés par cette croissance sont de - en - imp.
 Ipim cad valeur qui permet juste de maintenir K/t constant X En un m rythme à mesure que $K \nearrow$.

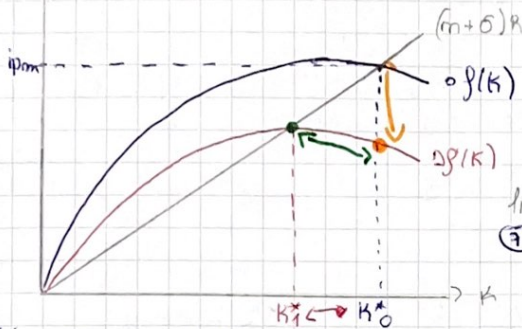
Le rythme auquel k se rapproche à 0 qd i rejoint ipm . L'éco est alors sur son chemin régulier de croiss. Le k/t et y sont constants

⑤ $y = \frac{Y}{L} \Leftrightarrow lny = lny - lml \quad gy = gY - gL \quad gy = gY - m$

$gy = gy + m$ ALT et AES $gy = 0$ donc $gy = m$

em l'absence de PT l'éco croit taux de croiss de la pop

⑥



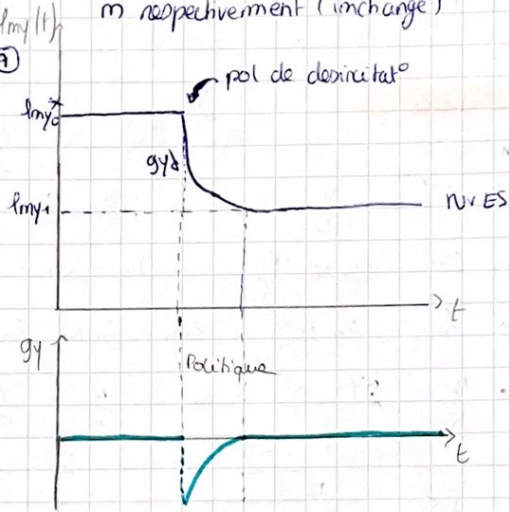
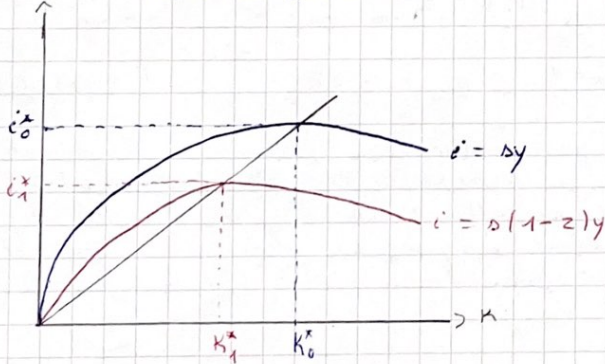
ACT: f'I baisse $i < ipm$

ALT: l'éco retrouve son ES mais avec niveau de k/t et nav/t
 ⇒ imp que les niv d'avant partant de l'ES initial. Le tx de croiss de y et y sont 0 et m respectivement (inchangé)

⑧ L'impôt impact le rev dispo des mé induisant une baisse de l'épargne et donc l'invest.

$i = sy$ devient $i = s(1-z)y$
 $z =$ tx imposition

Graphique de la courbe d'invest se déplace vers la droite



Nous retrouvons une situation similaire à celle de la quest 6 (dérivée à l'S/I)

$k = s f(k) - (m + \delta)k$

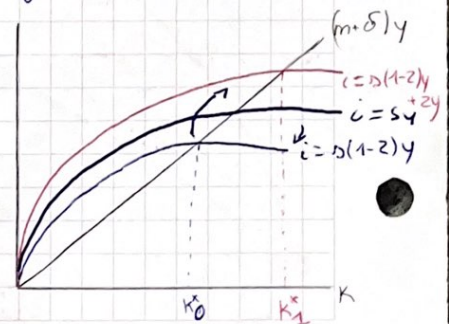
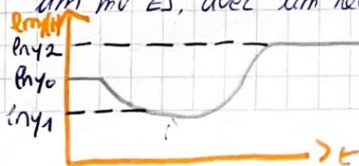
$I = S \rightarrow$ hypothèse NS (modèle Solow)

si l'Etat décide d'investir les recettes d'impôt la mv d'invest est:

$i = sy$ après taxe $i = s(1-z)y$
 invest des recettes $i = s(1-z)y + sy$
 $i = (1-z + z)sy$ ↑ l'invest

Ainsi, l'impact des recettes de l'éco entraîne une N de l'i donc un accroissement de k et du rev t à AS

L'éco atteint un mv ES, avec un rev t relevé.



EXERCICE 3:

$$Y = K^\alpha (AL)^{1-\alpha}$$

$$1) \hat{y} = \frac{Y}{AL} \Leftrightarrow \hat{y} = \frac{K^\alpha (AL)^{1-\alpha}}{AL} \Leftrightarrow \hat{y} = K^\alpha (AL)^{-\alpha} \quad \hat{y} = \left(\frac{K}{AL}\right)^\alpha$$

$$\hat{y} = f(\hat{k}) = \hat{k}^\alpha$$

2) Equat° fondamentale dynamique.

$$\hat{K} = \frac{K}{AL} \Leftrightarrow \ln \hat{K} = \ln K - \ln A - \ln L$$

$$\frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{L}}{L} \Leftrightarrow \frac{\dot{K}}{K} = \frac{\Delta Y - \delta S}{K} - \gamma - m$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{K}}{K} = \frac{\Delta Y}{K} - \delta - \delta - m \quad \frac{\dot{K}}{K} = \Delta \frac{K^\alpha (AL)^{1-\alpha}}{K} - (m + \delta + \delta)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{K}}{K} = \Delta \frac{K^{\alpha-1} (AL)^{1-\alpha}}{K^{\alpha-1} AL^{1-\alpha}} \frac{K^\alpha}{K} - (m + \delta + \delta) \Leftrightarrow \hat{K} = \Delta \hat{K}^\alpha - (m + \delta + \delta) \hat{K}$$

3) Explication de la dynamique du capital.

L'équation dynamique fondamentale implique la Δ du K le par unité de travail efficace. Elle dépend de l'écart entre I le efficace et I_{pm} . Si le \hat{K} est petit, I dépasse sa valeur de p_{im} et le K le efficace \uparrow . Plus compte tenu de la décroissance de productivité marginal du K le efficace, le niv d'invest \uparrow de $-em-$ et finit par rejoindre sa valeur de p_{im} qui continue d'augmenter au m rythme. L'eco converge ainsi vers un état stationnaire de K .

4) La prod et c* et consolt c* GRAPHIQUE

$$\hat{K} = \Delta f(\hat{K}) - (m + \delta + \delta) \hat{K}$$

$$\hat{K} = \Delta \hat{K}^\alpha - (m + \delta + \delta) \hat{K} \quad \hat{K} = 0 \Leftrightarrow \Delta \hat{K}^\alpha = (m + \delta + \delta) \hat{K}$$

$$\Leftrightarrow \hat{K}^{\alpha-1} = \frac{m + \delta + \delta}{\Delta} \quad \hat{K}^* = \left[\frac{\Delta}{m + \delta + \delta} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad \hat{y}^* = \left[\frac{\Delta}{m + \delta + \delta} \right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\hat{y} = \frac{Y}{A} \Leftrightarrow y = A \hat{y} \Leftrightarrow y^* = A \hat{y}^* \quad y^* = A \left[\frac{\Delta}{m + \delta + \delta} \right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

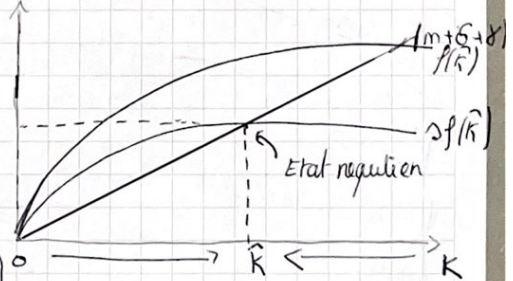
$$c^* (1 - \delta) y^* \Leftrightarrow c^* = A (1 - \delta) \left[\frac{\Delta}{m + \delta + \delta} \right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

5) Taux de croiss à LT de y et Y

$$\hat{y} = \frac{Y}{AL} \quad Y = A \hat{y} \quad y = A \hat{y} \Leftrightarrow g_y = g_A + \alpha g_{\hat{K}}$$

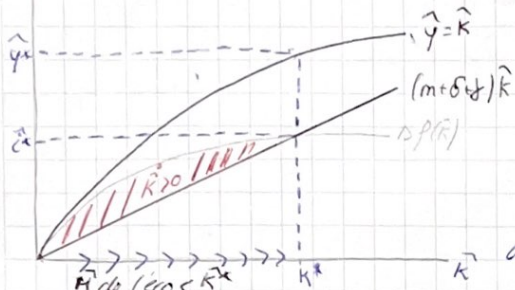
$$g_y = \gamma + \alpha g_{\hat{K}} \text{ or à l'ES } g_{\hat{K}} = 0 \quad [g_y = \gamma]$$

$$y = \frac{Y}{L} \quad g_y = g_Y - g_L \Leftrightarrow g_Y = g_y + g_L \quad [g_Y = \gamma + m]$$



Ainsi à LT, le tx de croiss du niv le est égal au tx de croiss du PT. En l'absence de PT, une telle eco ne connaît pas de croiss. De ce fait, le PT est le moteur de croiss de l'eco. Aussi ds cette eco, le produit marchand \uparrow plus vite que la pop ($g_y = m + \delta$)

6) Trajectoire du revenu à par d'une situation de déséquilibre ($\hat{K} < \hat{K}^*$)

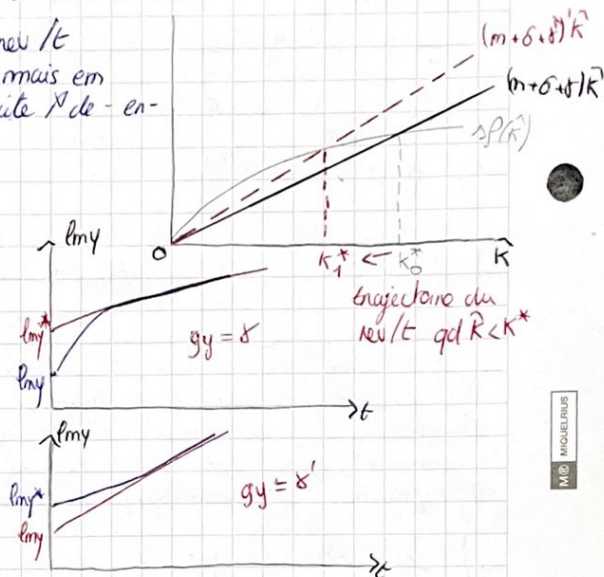
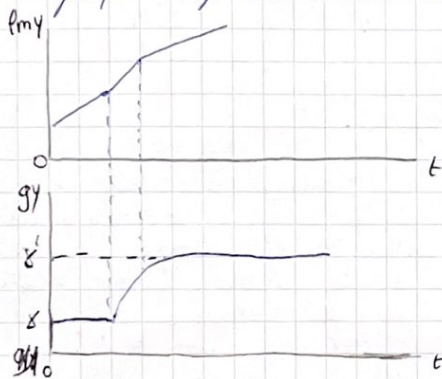


7) Accroissement de l'efficacité du T
 $\delta \rightarrow \delta'$ $r' \rightarrow r$

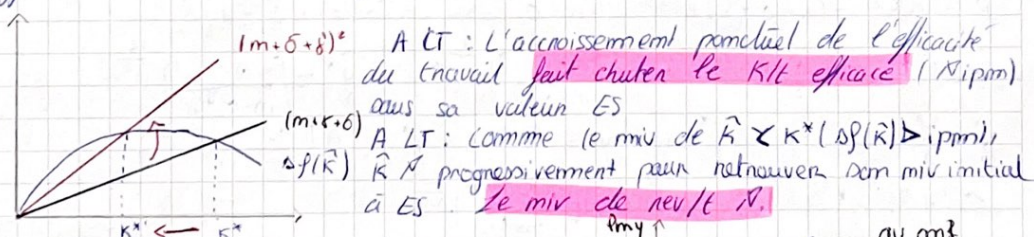
À CT (transition): À CT, le K/t efficace ainsi que le rev/t efficace \nearrow car l'accroissement de l'efficacité du T fait \nearrow l'ipm \nearrow relativement à l'i en unité de t efficace.

À LT l'éco retrouve un mv ES avec un mv de \hat{K}^* et y^* plus faible. Le tx de croiss du $rev/t \nearrow$.

À l'instant du choc, le taux de croiss du rev/t s'élève au dessus de sa valeur initiale mais en dessous de sa mv valeur de LT. Il va ensuite \nearrow de vite jusqu'à rejoindre sa mv valeur δ'



8) Effet d'un accroissement ponctuel



l'évolution de y en transition

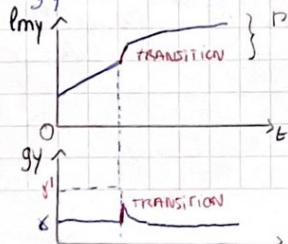
$$\hat{y} = R \hat{K} \quad \text{ou} \quad g_{\hat{y}} = g_A + g_{R \hat{K}}$$

$$\text{ou} \quad g_{\hat{K}} = \frac{R \hat{K}}{\hat{K}} - (m + \delta + s) = \Delta R \hat{K}^{\alpha-1} - (m + \delta + s)$$

$$g_Y = g_A + \alpha [\Delta R \hat{K}^{\alpha-1} - (m + \delta + s)]$$

$$g_Y = \delta + \alpha [\Delta R \hat{K}^{\alpha-1} - (m + \delta + s)]$$

$$g_Y \geq \delta + \alpha [\Delta R \hat{K}^{\alpha-1} - (m + \delta + s)] = 0 \text{ à CT}$$



GRAPHIQUEMENT

Une chute de A fait chuter \hat{K} sous son mv ES. Ce qui implique que $\Delta R > (m + \delta + s) \hat{K}$ à la suite du choc. Alors le TC du $rev/t \nearrow$ au moment du choc et \nearrow jusqu'à revenir à sa valeur de LT.

Economiquement cela s'explique par le fait que la hausse de A \uparrow la productivité marginale du K relativement à la pml. Ce qui explique l'accélération temporaire de la croissance.

g) L'innovat° ponctuelle permet d'atteindre une trajectoire (m, y) élevée ($(m, y) \rightarrow (m, y')$). Elle produit un effet en niveau. Ce qui implique que la croissance accélère que de façon temporaire mais l'effet est durable car le nivellement \rightarrow à ce qu'il aurait été en ce point du lps sans le saut de A.

L'accélération du m est \oplus durable car la pente de la trajectoire du nivellement (m, y) relève. Ce qui implique que l'éco finira nécessairement par atteindre un niv de m par hab plus élevé que celui que le simple saut de A permet d'atteindre.

(dans un m plan, présenter graphiquement l'effet du saut A et l'accélération de A sur (m, y) .)

EXO 4

$y = K^\alpha (AL)^{1-\alpha}$ 1) Forme intensive $\hat{y} = f(\hat{K}) = \hat{K}^\alpha$

Equation dynamique de $\hat{K} = \hat{K} = s f(\hat{K}) - (m + \delta + r)K$
 ES $\Rightarrow \hat{K}^* = \left(\frac{s}{m + \delta + r} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$

$\hat{c}^* = (1-s)\hat{y}^* \Rightarrow \hat{c}^* = (1-s) \frac{s}{m + \delta + r} \frac{1}{1-\alpha}$

2) L'expression de la conso \hat{c}^* en f° de \hat{K}^* $\hat{c}^* = (1-s) \frac{s}{m + \delta + r} \frac{1}{1-\alpha}$

Partant de l'ES on a : $s\hat{K}^\alpha - (m + \delta + r)K = 0$ $D = (m + \delta + r)K$
 D'où $\hat{c}^*(\hat{K}^*) = (1 - (m + \delta + r)K) \frac{1}{1-\alpha} \frac{s}{m + \delta + r}$

D'où $\hat{c}^*(\hat{K}^*) = \hat{K}^{*\alpha} - (\delta + r + m)\hat{K}^*$

Cette équation implique la conso en unité de t efficace correspond à la p° t efficace diminuée de l'i effectif en unité de t eff.

3) Maximisat° de la conso \hat{c}^* : $\text{Max } \hat{c}^*(\hat{K}^*) \Rightarrow \begin{cases} \hat{c}^{*'}(\hat{K}^*) = 0 \\ \hat{c}^{*''}(\hat{K}^*) < 0 \end{cases}$

$\hat{c}^{*'}(\hat{K}^*) = \alpha \hat{K}^{*\alpha-1} - (m + \delta + r) = 0 \Rightarrow \alpha \hat{K}^{*\alpha-1} = m + \delta + r$

$f'(\hat{K}^*) =$ Productivité marg du K/t efficace

Alors $f'(\hat{K}^*) = m + \delta + r$ cela implique la conso par t eff est maximale si la productivité marginale du K/t eff est égale à $(m + \delta + r)$. Il s'agit de la conclusion de la règle d'or du K/t eff $f'(K_{OR}) = m + \delta + r$

4) Valeur de K_{OR} $f'(K_{OR}) = m + \delta + r$ $\alpha K_{OR}^{\alpha-1} = m + \delta + r$

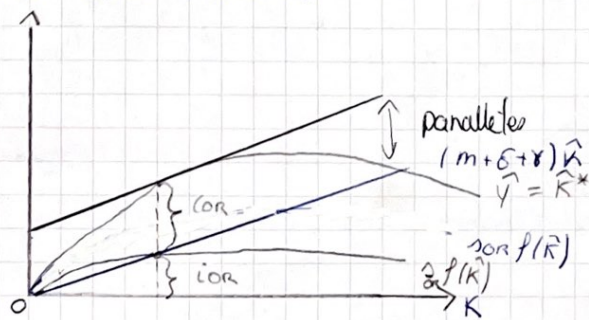
D'où $K_{OR} = \left[\frac{\alpha}{m + \delta + r} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$

5) Taux d's de règle d'or

On sait que $D = (m + \delta + r)K^{1-\alpha}$

$D_{OR} = (m + \delta + r)K_{OR}^{1-\alpha}$

$D_{OR} = (m + \delta + r) \left(\frac{\alpha}{m + \delta + r} \right)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha}} D_{OR} = \alpha$



~~EXERCICES: Règle d'or d'accumulation~~

On pouvait obtenir aussi par en comparant analogiquement \bar{K}^* et \bar{K}_0 . On constate que le taux d'S de la règle d'or correspond à la part de la norme due K ds le neu agrégé ds Solow. Il s'agit de l'élasticité de la prod par rapport au K.

b) Est-il possible de l'emp élargir ?

Dans le IS, toute Δ du niveau d'S implique 2 effets sur la conso. A rev donné, une Δ de S réduit la conso. Puis une Δ S Δ I relativement à I_{priv} et élève ainsi le rev d'ES et une Δ du rev Δ la conso. Ainsi, tant que le niv d'S est $<$ à sa valeur de règle d'or (α), son Δ le rev suffisamment pour élever la conso. Le 2^{es} effet d'emprunte domine sur le 1^{er}. Mais au delà de sa valeur de règle d'or, le 1^{er} effet l'emprunte. Le rev d'ES continue d'accroître mais sa hausse n'est pas suffisante pour compenser le fait qu'une part est Δ n réduite du rev consommé.

CCL: Un niv d'S optimal n'impose ($\Delta = \alpha$)

EXERCICES: Education et croissance.

$$y = k^\alpha (hL)^{1-\alpha}, \quad \bar{k} = \frac{K}{hL}, \quad \hat{y} = \frac{y}{L}, \quad K = \Delta y$$

1) Equat° dynamique du K

$$\hat{\bar{k}} = \frac{\dot{K}}{hL} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{h}}{h} - \frac{\dot{L}}{L} \quad h \text{ constant} \Rightarrow \frac{\dot{h}}{h} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{\bar{k}}}{\bar{k}} = \frac{\Delta y}{K} - n \Leftrightarrow \frac{\dot{\bar{k}}}{\bar{k}} = \frac{\Delta k^\alpha (hL)^{1-\alpha}}{k} - n \quad \frac{\dot{\bar{k}}}{\bar{k}} = \alpha \bar{k}^{\alpha-1} - n \quad \text{D'au } \bar{k} = \alpha \bar{k}^\alpha - m \bar{k}$$

$$ES \Rightarrow \dot{\bar{k}} = 0 \quad \alpha \bar{k}^{\alpha-1} = m \bar{k} \quad \bar{k}^* = \left(\frac{\alpha}{m}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad \text{D'au } \bar{k}^* = \left(\frac{\alpha}{m}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad \hat{y}^* = \bar{k}^{\alpha}$$

$$\text{D'au } \hat{y}^* = \left(\frac{\alpha}{m}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad \hat{y} = \frac{y}{L} \quad y = h\hat{y} \quad y^* = h\hat{y}^* \quad \text{D'au } y^* = h\left(\frac{\alpha}{m}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$y = y(h, n, m)$, y est une fonction croissante de α . Un tx d'S + élevé permet d'atteindre un niv de K/t plus élevé à I_{priv} donné.

A l'opposé, le taux de crois dom impacte négativement y . Quant au K humain par individu, il n le rev ES.

$$* \hat{\bar{k}} = \left(\frac{K}{hL}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{ou} \quad * \hat{y} = \frac{y}{hL}$$

$$\hat{\bar{k}} = \left(\frac{K}{L} \cdot \frac{1}{h}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \hookrightarrow \hat{y} = \frac{y}{h}$$

$$\hat{k} = \left(\frac{y}{h}\right)^2 \quad \text{car } \frac{y}{L} = \hat{y}$$

2) Expression du tx de crois hors de l'ES

$$\hat{y} = \bar{k}^\alpha \quad \frac{\hat{y}}{y} = \alpha \frac{\bar{k}}{K} \quad \text{or } \frac{\bar{k}}{K} = \alpha \bar{k}^{\alpha-1} - m$$

$$\text{D'au } \frac{\hat{y}}{y} = \alpha (\alpha \bar{k}^{\alpha-1} - m) \quad \text{On sait que } \hat{y} = \bar{k}^\alpha \quad \hat{k} = \hat{y}^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\text{et } \hat{y} = \frac{y}{h} \quad * \hat{k} = \left(\frac{y}{h}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad \text{Ainsi } \frac{\hat{y}}{y} = \alpha \left[\alpha \left(\frac{y}{h}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} - m \right] \Rightarrow \frac{\hat{y}}{y} = \alpha \alpha \left(\frac{h}{y}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - \alpha m$$

$$\frac{\hat{y}}{y} = \alpha \alpha \left(\frac{h}{y}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - \alpha m \quad h \text{ étant constant ds ce modèle le tx de crois du rev/t efficace est identique au tx de crois du rev/t}$$

$$\text{Autrement on a: } \hat{y} = \frac{y}{n} \Leftrightarrow \frac{\hat{y}}{y} = \frac{\dot{y}}{y} - \frac{\dot{h}}{h} \stackrel{=0}{=} \text{D'au } \frac{\hat{y}}{y} = \frac{\dot{y}}{y}$$

EXERCICE 6: Comptabilité de la croissance

$$\delta = 2\% \quad \delta' = 3\% \quad \alpha = 1/3$$

1) Tx de croiss de la X^2/t avant le changement et son évolut° à LT.
On est ds un PTS avec PT où le tx de croiss de la X^2/t est au tx de croiss du PT

D'au $gy = \delta = 2\%$. Avant le changement δ passe de 2 à 3%.
D'au à LT $gy = \delta' = 3\%$

2) Décomposition de la croiss de forme intensive $\hat{y} = \hat{K}^\alpha$ on $\hat{y} = \frac{y}{A} \Leftrightarrow y = A\hat{y}$
 $\Rightarrow y = A\hat{K}^\alpha$ on $\hat{K} = \frac{K}{A}$ D'au $y = A\left(\frac{K}{A}\right)^\alpha \Leftrightarrow y = \underbrace{A^{1-\alpha}}_B K^\alpha$

Im $\rightarrow \frac{\dot{y}}{y} = (1-\alpha)g_A + \alpha g_K \neq gy = (1-\alpha)g_A + \alpha g_K$ $\left(y = \frac{y}{L} \quad y = \frac{y}{AL} \right)$

ANU $gy = 2/3 g_A + 1/3 g_K$ $\frac{\dot{y}}{y} = 2/3 \frac{\dot{B}}{B} + 1/3 \frac{\dot{K}}{K}$ $* \hat{y} = \frac{y}{AL} \quad \hat{y} = \frac{1}{A} * \left(\frac{y}{L}\right) = \frac{y}{A} = \frac{y}{A\hat{y}}$

Ainsi l'équation montre que 2/3 de la croiss de y est attribuable à la croiss du PT (partie totale des facteurs) et le 1/3 restant est dû à la croiss du K/Lt.

3) Résultats quest 1 vs 2

La comptabilité de la croiss attribue une partie de la croiss et de son évolut° à la croiss du K/Lt et l'autre partie à la croiss de la **partie totale des facteurs**. Cependant ds le PTS, la croiss du K/Lt est expliquée elle-même par la croiss de la **partie totale des facteurs (PT)**. De ce pt de vue, le cadre de la comptabilité de la croiss peut être l'accroissement de A conduit à l'acc de K en relevant sa parté moy relative à celle de L . C'est cette acc de K que la comptabilité présente (de façon trompeuse) comme une source autonome de croiss de la X^2 .