# DST de Statistiques appliquées à l'économie (A)

11/12/2023

**Préambule:** L'objectif de cette évaluation n'est pas de tester une capacité à calculer rapidement. On cherche ici à s'assurer que le cours est compris. Il faut donc impérativement justifier vos résultats par une démonstration à partir des éléments dont vous disposez (énoncé, définitions, propriétés, raisonnements et calculs explicites) : un résultat seul, sans justification, vaut zéro. De plus, **toute démarche explicative (graphiques, calculs même faux) sera valorisée.**

## 1 Exercice A (7 points)

Soit X une v.a.r suivant une loi uniforme sur $[0, \theta]$, où $> 0$ est un paramètre inconnu. On considère un n-échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$ iid de la v.a.r X.

On considère l'estimateur suivant : $T_n = 2\bar{X}_n$ avec $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

(Si Y suit une loi uniforme sur $[a, b]$ on a $E(Y) = \frac{a+b}{2}$ et $V(Y) = \frac{(b-a)^2}{12}$)

1. Quel est le biais de l'estimateur $T_n$ dans l'estimation de $\theta$ ?
2. Trouvez l'Erreur Quadratique Moyenne de $T_n$.
3. L'estimateur $T_n$ est il convergent ?.
4. Trouvez l'estimateur de la méthode des moments du premier degré.

## 2 Exercice B (6 points)

Soit X suit une loi géométrique de paramètre p. On a un échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$ iid de la v.a.r X.

On a donc $P(X = x_i) = (1-p)^{x_i - 1}p$

Trouvez l'estimateur du maximum de vraisemblance de p en détaillant vos calculs.

## 3 Exercice C (7 points)

Dans un test de mathématique, les étudiants de l'université A ont des résultats distribués normalement avec une moyenne de 125 et une variance de 25 tandis que ceux de l'université B sont distribué normalement avec une moyenne de 100 et une variance de 100. Les résultats sont indépendants entre étudiants et entre écoles. On suppose que quatres étudiants de l'université A et 2 de l'université B réalisent ce test, quelle est la probabilité que la moyenne aux tests des étudiants A soit plus grande que celle des étudiants B ?

## 4 Exercice Bonus (2 points)

La durée de migration des oies peut être considérée comme une variable aléatoire X suivant une loi normale $(\mu, \sigma^2)$. Pour prévoir leur arrivée, une agence de protection des oiseaux essaye de déterminer la valeur de $\mu$. L'agence ne connait pas la variance de la loi normale $(\sigma^2)$ mais dispose d'une estimation $S_n^2 = 9$. Sur un échantillon de $n = 20$ oies ils trouvent qu'en moyenne la durée de migration est de 50 jours. Construisez un intervalle de confiance à 90% pour $\mu$. (détaillez vos calculs)