Macroéconomie : Croissance

Contrôle continu n°2 corrigé

Yoav COHEN

Considérez une économie à la Solow avec progrès technique. La fonction de production est :

$$Y = K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha}, \quad \text{où } 0 < \alpha < 1.$$

Y est la production agrégée, K le stock de capital, L le nombre de travailleurs et A l'efficacité du travail. Le taux d'épargne des ménages est noté s (avec $0 < s < 1$) et le taux de dépréciation du capital δ (avec $0 < \delta < 1$). A croît au taux exogène γ (strictement positif) et L croit au taux exogène n. La production et le capital par travailleur sont notés respectivement :

$$y = \frac{Y}{L} \quad \text{et} \quad k = \frac{K}{L}.$$

La production par unité de travail efficace et le capital par unité de travail efficace sont notés respectivement :

$$\hat{y} = \frac{Y}{AL} \quad \text{et} \quad \hat{k} = \frac{K}{AL}.$$

Les marchés sont parfaitement concurrentiels.

Questions et corrections

1. **Exprimez la fonction de production sous forme intensive et en unités de travail efficace, soit en fonction de $\hat{k}$ et $\hat{y}$.** (2 points)
   Correction :
   $$\hat{y} = \frac{Y}{AL} = \frac{K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha}}{AL} = \hat{k}^{\alpha}.$$

2. **Montrez que si $Y = K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha}$, alors dans le cadre habituel du modèle de Solow, $\alpha = \frac{rK}{Y}$.** (2 points)
   Correction : Dans un marché parfaitement concurrentiel, le rendement marginal du capital est donné par :
   $$r = \frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha K^{\alpha-1}(AL)^{1-\alpha}.$$
   Multiplier cette équation par K donne :
   $$rK = \alpha K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha} = \alpha Y.$$
   D'où :
   $$\alpha = \frac{rK}{Y}.$$

3. **Qu'est-ce que l'introduction de l'efficacité du travail A change par rapport au modèle de Solow sans progrès technique ?** (2 points)
   Correction : Il s'agit ici de comparer la forme de la fonction de production en unités de travail efficace avec celle du modèle de Solow sans progrès technique. Soit
   $$\hat{y} = \hat{k}^{\alpha} \quad \text{versus} \quad y = k^{\alpha}.$$

Ce que change l'introduction de A, c'est qu'il améliore la productivité du facteur travail et réduit, de ce fait, les rendements marginaux décroissants de la productivité du capital par tête dus à la productivité marginale décroissante du capital. (1 point)

On peut visualiser l'effet de A en posant

$$\hat{k} = \frac{K}{AL}.$$

On voit que pour toute augmentation de A, le capital par tête tend à baisser, repoussant ainsi l'échéance de l'état stationnaire, sans pour autant faire baisser le revenu par tête (comme ce qui se passerait dans le modèle de Solow sans progrès technique) car ce dernier progresse avec A. En effet,

$$\hat{y} = A\hat{k}^{\alpha}.$$

4. **Déterminez le taux de variation instantanée du capital par unité de travail efficace ($\dot{\hat{k}}$) en fonction de s, α, γ, n, δ et $\hat{k}$. À quelle condition $\hat{k}$ cesse-t-il de croître ?** (2 points)
Correction : On détermine l'évolution du capital par tête en unités de travail efficace au cours du temps via la méthode de log-différenciation ordinaire en commençant par poser :

$$\hat{k} = \frac{K}{AL}.$$

La variation du capital par unité de travail efficace est donnée par :

$$\frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{L}}{L}.$$

En substituant l'évolution du capital net, $\dot{K} = sY - \delta K$, et les taux de croissance respectifs de A et L, on obtient :

$$\frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} = \frac{sY}{K} - \delta - \gamma - n.$$

$$\dot{\hat{k}} = (\frac{sY}{K})\hat{k} - (\delta - \gamma - n)\hat{k}$$

$$\dot{\hat{k}} = (\frac{sY}{K})\frac{K}{AL} - (\delta - \gamma - n)\hat{k}$$

$$\dot{\hat{k}} = \frac{sY}{AL} - (\delta - \gamma - n)\hat{k}$$

Or $\frac{Y}{AL} = \hat{y}$

Donc

$$\dot{\hat{k}} = s\hat{y} - (\delta + \gamma + n)\hat{k}.$$

Comme $\hat{y} = \hat{k}^{\alpha}$, cela devient :

$$\dot{\hat{k}} = s\hat{k}^{\alpha} - (\delta + \gamma + n)\hat{k}.$$

La croissance de $\hat{k}$ s'arrête lorsque $\dot{\hat{k}} = 0$, soit lorsque :

$$s\hat{k}^{\alpha} = (\delta + \gamma + n)\hat{k}.$$

Ainsi, $\dot{\hat{k}}$ cesse de croître lorsque l'investissement par travailleur efficace, $s\hat{k}^{\alpha}$, est exactement égal à l'investissement de point mort $(\delta + \gamma + n)\hat{k}$.

5. **Représentez graphiquement la dynamique d'accumulation du capital par unité de travail efficace. Que se passe-t-il si le taux de progrès technique γ augmente subitement ? (2 points)**

   La dynamique d'accumulation du capital par unité de travail efficace peut être décrite comme suit :

   La dynamique d'accumulation du capital par unité de travail efficace est graphiquement identique à celle du modèle de Solow sans progrès technique. Quant à l'augmentation du taux de croissance du progrès technique, elle est graphiquement identique à une augmentation du taux de n.

   (a) Avant le choc, l'économie est à l'état stationnaire (ES).

   (b) Pendant le choc, une augmentation de γ (avec $\gamma' > \gamma$) provoque une accélération temporaire de la croissance. Néanmoins, l'ipm augmentera ce qui diminuera les valeurs $\hat{k}$ et $\hat{y}$

   (c) Après le choc, l'économie atteint un nouvel état stationnaire (ES') plus faible, avec des trajectoires de croissance modifiées (un $\gamma' > \gamma$).

   Nous pouvons aussi rendre compte de l'évolution sur g_y. En effet, le taux de croissance du revenu par travailleur augmentera donc a long terme, le rythme de croissance du revenu par travailleurs sera superieur avec γ'. En effet, $g_y = \gamma'$ lorsqu'on aura atteint le nouvel ES.

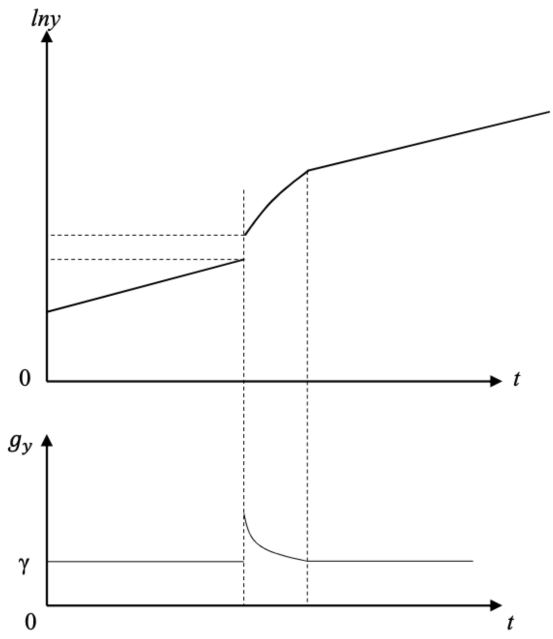

Figure 1: Équilibre du Modèle de Solow

6. **Déterminez la valeur de $\hat{k}^{\star}$, $\hat{y}^{\star}$, $y^{\star}$ sur le sentier de croissance équilibrée.**

À l'état stationnaire, nous avons $\dot{\hat{k}} = 0$, ce qui nous permet de déterminer la valeur de $\hat{k}^\star$:

$$s\hat{y}^\star - (\delta + n + \gamma)\hat{k}^\star = 0$$

En réarrangeant cette équation, on obtient :

$$\hat{k}^\star = (\frac{s}{\delta + n + \gamma})^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Ensuite, pour déterminer la valeur de $\hat{y}^\star$, nous utilisons la fonction de production par tête efficace :

$$\hat{y} = \hat{k}^\alpha$$

À l'état stationnaire, nous avons donc :

$$\hat{y}^\star = (\hat{k}^\star)^\alpha$$

En substituant l'expression de $\hat{k}^\star$ dans celle de $\hat{y}^\star$, nous obtenons :

$$\hat{y}^\star = (\frac{s}{\delta + n + \gamma})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Enfin, pour déterminer la production totale par tête $y^\star$, nous utilisons la relation :

$$y^\star = A\hat{y}^\star$$

où A est le niveau d'efficacité du travail. Ainsi, la valeur de $y^\star$ est déterminée par la valeur de $\hat{y}^\star$ et le niveau d'efficacité du travail A.

Donc

$$y^\star = A(\frac{s}{\delta + n + \gamma})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

En résumé, les valeurs des variables à l'état stationnaire sont :

$$\hat{k}^\star = (\frac{s}{\delta + n + \gamma})^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$\hat{y}^\star = (\frac{s}{\delta + n + \gamma})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$y^\star = A(\frac{s}{\delta + n + \gamma})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

7. **Déduisez la valeur de la consommation par tête à l'état stationnaire c^*. La consommation par tête est-elle nécessairement maximisée à cette valeur ? Expliquez via un graphique.** (2 points)
Correction :

$$c^* = (1 - s)y^*.$$

$$c^* = (1 - s)A(\frac{s}{\delta + n + \gamma})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

La consommation est maximisée lorsque le taux d'épargne correspond à la règle d'or. Ça n'est pas forcément le cas a tout les ES.

8. **Par quelle règle est-il possible, dans le modèle de Solow, de maximiser la consommation par tête sur le sentier de croissance équilibré ? Déterminez la valeur qui maximiserait c^*.** (2 points)
Correction : La règle d'or consiste à choisir $\hat{k}$ tel que :

$$\frac{\partial c}{\partial \hat{k}} = 0.$$

il nous faut donc définir $\hat{c}$ en fonction de $\hat{k}$.

On part donc de $s^\star = (\delta + \gamma + n)\hat{k}^{(1-\alpha)}$

$\hat{c}^\star = (1 - (\delta + \gamma + n)\hat{k}^{(1-\alpha)}(\frac{(\delta+\gamma+n)\hat{k}^{(1-\alpha)}}{\delta+\gamma+n})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$

$\hat{c}^\star = (1 - (\delta + \gamma + n)\hat{k}^{(1-\alpha)})(\hat{k}^{(1-\alpha)})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$

$\hat{c}^\star = (1 - (\delta + \gamma + n)\hat{k}^{(1-\alpha)})(\hat{k})^{\frac{(1-\alpha)\alpha}{1-\alpha}}$

$\hat{c}^\star = (1 - (\delta + \gamma + n)\hat{k}^{(1-\alpha)})(\hat{k})^{\alpha}$

$\hat{c}^\star = \hat{k}^\alpha - (\delta + \gamma + n)\hat{k}$

Or, il faut que $\frac{D(\hat{c})}{D(\hat{k}} = 0$

donc $\alpha\hat{k}^{\alpha-1} = (\delta + \gamma + n)$

En résolvant: on obtient $\hat{k}^{or} = \hat{k}^\star = (\frac{\alpha}{\delta+n+\gamma})^{\frac{1}{1-\alpha}}$

En remplacant $\hat{k}^{or}$ dans la valeur de $s^\star = (\delta + \gamma + n)\hat{k}^{(1-\alpha)}$, nous avons:

$s^{or} = (\delta + \gamma + n)((\frac{\alpha}{\delta+n+\gamma})^{\frac{1}{1-\alpha}})^{(1-\alpha)}$

$s^{or} = (\delta + \gamma + n)(\frac{\alpha}{\delta+n+\gamma})$

$s^{or} = \alpha$

Cela implique $s = \alpha$ pour maximiser la consommation.

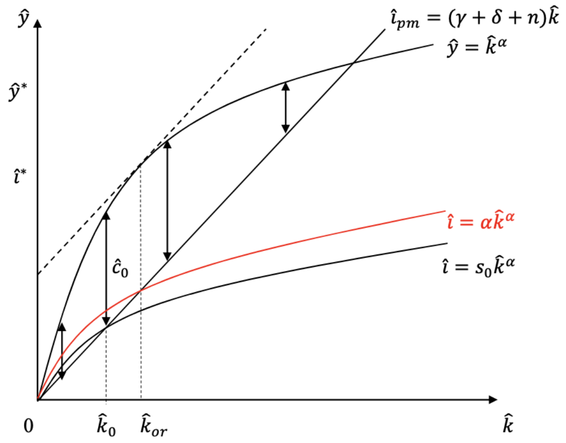

Figure 2: Équilibre du Modèle de Solow

9. **Déterminez l'équation du taux de croissance du revenu g_y, vérifiée en transition comme à long terme (soit son expression en fonction de g_A et $g_{\hat{k}}$). Quelle est la valeur du taux de croissance du revenu par travailleur à l'état régulier ?** (2 points)
Correction : En transition :

$$g_y = g_A + \alpha g_{\hat{k}}.$$

À long terme, $g_{\hat{k}} = 0$, donc $g_y = g_A = \gamma$.

or

$$g_{\hat{k}} = \frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}}$$

donc

$$g_{\hat{k}} = \frac{s\hat{k}^{\alpha} - (\delta + \gamma + n)\hat{k}}{\hat{k}} = s\hat{k}^{\alpha-1} - (\delta + \gamma + n)$$

.

Enfin, le taux de croissance du revenu par travailleurs vérifié a court et long terme se note:

$$g_y = \gamma + \alpha(s\hat{k}^{\alpha-1} - (\delta + \gamma + n)).$$

10. **Considérez le modèle AK où $Y = AK$, dans lequel A est une constante et $\dot{K} = sY - \delta K$. De quoi dépend le taux de croissance économique du produit agrégé Y à long terme ? En quoi cela contredit les conclusions du modèle de Solow avec progrès technique ?** (2 points)

    Correction : Dans le modèle AK :

    $$g_Y = sA - \delta.$$

    Contrairement au modèle de Solow, le taux d'épargne influence directement la croissance à long terme. Dans le modèle AK, le taux de croissance de long terme (du produit agrégé) est une fonction positive du taux d'épargne et de l'efficacité du travail / progrès technique. (Note : le taux de croissance est positif constant et constant si et seulement si sA $>$ δ, mais ce n'est pas une condition très restrictive car bien souvent s $>$ δ). Ceci contredit le modèle de Solow avec progrès technique, où le taux d'épargne ne joue pas sur le taux de croissance à long terme du produit par tête ($g_y = g_A = \gamma$) ou du produit agrégé ($g_Y = g_L = n$).

11. **Pourquoi la prédiction de Solow d'une convergence (absolue ou relative) à long terme ne fait-elle plus sens dans le modèle AK ?** (2 points)

    Correction : Le modèle de Solow prédit une convergence absolue (ou relative) des pays pauvres sur les pays riches. En accumulant du capital par tête, les pays pauvres devraient en effet voir leur produit / revenu par tête s'élever progressivement pour leur permettre finalement d'atteindre le même niveau de revenu par tête que les pays riches à l'état stationnaire (si et seulement si ces pays ont des paramètres structurels identiques aux pays riches : s, n, γ). Une telle prédiction n'a plus de sens dans le modèle AK où il n'existe pas d'état stationnaire. Les pays peuvent croitre de manière illimitée s'ils font croitre leur taux d'épargne et leur niveau d'efficacité du travail / progrès technique.

12. **Commentez l'équation suivante dans le cadre d'un modèle de croissance endogène :**

    $$\dot{A} = \theta L_A^{\lambda} A^{\phi}.$$

    (1 point bonus)
    Correction : Cette équation mesure la variation instantanée de A. Elle est fonction de θ, L_A^{λ} et A^{ϕ}.

    - θ mesure la productivité des chercheurs.
    - L_A représente le nombre de chercheurs dans l'économie, et A le progrès technique.
    - λ et ϕ quantifient des externalités, c'est-à-dire l'impact de l'activité d'un agent sur d'autres agents.

- λ mesure l'externalité de duplication, soit la probabilité que les chercheurs trouvent la même idée. Cette valeur est comprise entre 0 et 1.
- ϕ mesure l'externalité de connaissance :
  - Si $\phi > 0$, un effet nommé *"s'asseoir sur les épaules de géants"* apparaît. Cela signifie que plus on a déjà découvert d'idées, plus il est possible de s'appuyer sur les connaissances existantes pour en découvrir de nouvelles.
  - Si $\phi < 0$, on observe un *"fishing-out effect"* ou *"effet de pêche"*. Cela traduit un impact négatif de la connaissance déjà découverte : en effet, si beaucoup d'idées ont déjà été trouvées, il en reste moins à découvrir.