2) $P(X=0) = \frac{9^0 e^{-9}}{0!} = e^{-9} \approx 0,00012$

3) $P(X=3) + P(X=4) = \frac{9^3 e^{-9}}{3\times2\times1} + \frac{9^4 e^{-9}}{4\times3\times2\times1}$

$\Rightarrow \approx 0,015 + 0,034 \approx 0,049$.

E : le voyageur oublie ses bagages dans le train

$P(E) = 0,002$

1000 voyageurs (Regardés au hasard et leurs comportements par rapport aux bagages sont indépendants).

X : Nombre de voyageurs ayant oublié leurs bagages dans le train.

$\overline{E}$: le voyageur n'oublie pas ses bagages dans le train.

$\boxed{P(\overline{E}) = 1 - P(E)} = 0,998$.

Loi BINOMIALE

↳ $X \sim \mathcal{B}(1000 ; 0,002)$.

$$P(X = x) = \underbrace{C_x^{1000}}\, 0{,}002^x\ 0{,}998^{1000-x}$$

$$\Rightarrow \binom{1000}{x} = \frac{1000!}{x!\,(1000-x)!}$$

$$\boxed{E(X) = np}$$

Ici, $E(X) = 1000 \times 0{,}002 = 2$ voyageurs ayant oublié leurs bagages dans le train.

$$\boxed{V(X) = np\,(1-p)}$$

Ici $V(X) = 1000 \times 0{,}002\,(0{,}998)$

$\Rightarrow V(X) = 1{,}996$.

Si $E(X)$ et $V(X)$ sont approximativement égaux, on pourra approximer la variable aléatoire X par une loi de Poisson.

$X \sim \mathcal{P}\,(np)$ $\quad np = 2$

$X \sim \mathcal{P}\,(2)$

↳ $E(X)$ de la Loi binomiale

a) $P(X=0)$

$$P(X=x) = f(x) = \frac{N^x\, e^{-N}}{x!}$$

$$\Rightarrow P(X=0) = \frac{2^0\, e^{-2}}{0!}$$

$$\Rightarrow P(X=0) = \frac{e^{-2}}{1} = e^{-2} \approx 0,135.$$

b) $P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4)$

$$\Leftrightarrow P(X \geq 5) = 1 - \left(\sum_{x=0}^{4} \frac{2^x e^{-2}}{x!} \right)$$

$$= 1 - \Big(\underbrace{e^{-2}}_{x=0} + \underbrace{\frac{2e^{-2}}{1}}_{x=1} + \underbrace{\frac{4e^{-2}}{2}}_{x=2} + \underbrace{\frac{8e^{-2}}{6}}_{x=3}$$

$$+ \underbrace{\frac{16e^{-2}}{24}}_{x=4} \Big)$$

$$\Rightarrow 1 - (0,1357 + 0,271 + 0,271 + 0,18 + 0,09).$$

$$\approx 0,053.$$

LOI DES PROBABILITÉS TOTALES

évènement

Exercice E : La personne est en état débriété

évènement contraire

$\bar{E}$: La personne n'est pas en état débriété.

T^+ : Le test est positif

le test est positif pour quelqu'un qui n'est pas en état débriété.

dans 2% des cas. (énoncé)

On a donc : $P(T+/\bar{E}) = \frac{2}{100} = 2\%$

Positif pour quelqu'un qui est en état débriété dans 96% des cas (énoncé).

On a donc : $P(T^+/E) = \frac{96}{100} = 96\%$.

3% des conducteurs sont en état débriété (énoncé)

On a donc : $P(E) = \frac{3}{100} = 3\%$.

Si le test est positif, quelle est la probabilité que ce conducteur ne soit pas en état débriété ?

$P(\bar{E}/T^+)$?

FORMULE DE BAYES

$$\boxed{P(A/B) = \frac{P(B/A) \times P(A)}{P(B)}}$$

$$P(\bar{E}/T^+) = 1 - P(E/T^+)$$

$$P(E/T^+) = \frac{P(T^+/E) \times P(E)}{P(T^+)}$$

FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES

$$P(T^+) = P(T^+/E)\,P(E) + P(T^+/\bar{E}) \times P(E).$$

Évènement contraire :

$$P(\bar{E}) = 1 - P(E).$$

$$\Rightarrow P(\bar{E}) = 1 - \frac{3}{100} = \frac{97}{100} \; (= 97\%).$$

$$P(T+) = \frac{24}{25} \times 3\% + \frac{1}{50} \times 97\%$$

$$\Rightarrow P(T^+) = \frac{241}{5000}$$

$$P(E/T^+) = \frac{\frac{24}{25} \times \frac{3}{100}}{\frac{241}{5000}}$$

$$\Leftrightarrow P(E/T+) = \frac{144}{241}$$

et on sait que $P(\bar{E}/T^+) = 1 - P(E/T^+)$

$$\Rightarrow P(\bar{E}/T) = 1 - \frac{144}{241} = 40\% \text{ (environ).}$$

On change les données de l'exercice.

La proportion de conducteurs en état d'ébriété est de 30 %.

$$P(E) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}.$$

$$P(E) = 1 - P(E) = 1 - \frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow P(\bar{E}) = \frac{7}{10}.$$

Formule des probabilités totales

$$P(T^+) = \frac{24}{25} \times \frac{3}{10} + \frac{1}{50} \times \frac{7}{10}$$

$$P(T^+) = \frac{151}{500}.$$

Formule de Bayes

$$P(E/T^+) = \frac{P(T^+/E) \times P(E)}{P(T^+)}.$$

$$P(E/T^+) = \frac{\frac{24}{25} \times \frac{3}{10}}{\frac{151}{500}} = \frac{144}{151}$$

$X \sim \mathcal{N}(25, 1)$

X est une variable aléatoire qui désigne la pression occulaire des victimes de glaucome.

$X \sim \mathcal{N}(20, 1)$

X est une variable aléatoire qui désigne la pression occulaire de ceux qui n'ont pas de glaucomes.

Soit l'évènement G : la personne a un glaucome.
Evènement contraire $\rightarrow \bar{G}$: la personne n'a pas un glaucome.

$P(G) = 0,1 \quad (10\%)$
$P(\bar{G}) = 1 - P(G) = 1 - 0,1 = 0,9 \; (90\%)$

Probabilité que la personne soit victime d'un glaucome sachant $X = x$.
$\Rightarrow P(G / X = x)$.

$f_1(x) \rightarrow$ densité de x si la personne est atteinte de glaucome.

$f_2(x) \rightarrow$ densité de x si la personne n'est pas atteinte de glaucome.

$P(X/\bar{G})$?

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2\,(x-25)^2}$$

$$f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2\,(x-20)^2} = P(X|G)$$

$$P(G/X=x) = \frac{f_2(x)\,P(G)}{P(X)}$$ Formule de Bayes

$P(x) \to$ Formule des probabilités totales.

$$P(x) = \underbrace{P(G) f_1(x)}_{P(X/G)} + P(\bar{G}) \times \underbrace{P(X/\bar{G})}_{f_2(x)}$$

08.11 10% de la population ont un glaucome.

$f_1(x)$ = densité de X si la personne est atteinte de glaucome.
$P(X/G)$.

$$\Longleftrightarrow P(G) f_1(x) > P(\bar{G}) f_2(x)$$

$$\Longleftrightarrow 0{,}1 \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2 (x-25)^2} > 0{,}9 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2 (x-20)^2}$$

$$\Longleftrightarrow e^{-1/2 (x-25)^2} > 9 e^{-1/2 (x-20)^2}$$

$$\Longleftrightarrow \ln\left(e^{-1/2 (x-25)^2}\right) > \ln(9) + \ln\left(e^{-1/2 (x-20)^2}\right)$$

$$\Longleftrightarrow -\frac{1}{2}(x-25)^2 > \ln(9) + \frac{1}{2}(x-20)^2$$

$$\Longleftrightarrow -\frac{1}{2} x^2 + 625 - 50x > \ln(9) - \frac{1}{2}(x^2 + 400 - 40x)$$

$$\Longleftrightarrow x^2 + 400 - 40x > 2\ln(9) + x^2 + 625 - 50x.$$

$\Rightarrow 400 - 40x > 2\ln(9) + 625 - 50x$

$\Rightarrow 10x > 2\ln(9) + 225$

8.11 $\iff x > \boxed{\frac{\ln(9)}{5} + 22,5}$

Exercice.

$P(R) = 0,1$

↳ probabilité qu'il pleuve.

$P(\bar{R}) = 0,9$

↳ probabilité qu'il ne pleuve pas

$P(M)$

↳ probabilité que la météo annonce de la pluie

On sait que la météo a raison 80 jours sur 100.

$P(M / R) = 0,8$

et

$P(\bar{M} | \bar{R}) = 0,8$

Formule de Bayes :

$$P(R|M) = \frac{P(M|R)\,P(R)}{P(M)}.$$

Formule des probabilités totales :

$$P(M) = P(M/R)\,P(R) + P(\bar{M}/\bar{R})\,P(\bar{R})$$

Avec $P(M/\bar{R}) = 1 - \underbrace{P(\bar{M}/\bar{R})}_{=0,8}$

$P(M/\bar{R}) = 1 - 0,8$

$P(M/\bar{R}) = 0,2$

$P(M) = 0,8 \times 0,1 + 0,2 \times 0,9 = 0,26.$

0,8 P(R)

$P(R/M) = \frac{0,8 \times 0,1}{\underbrace{0,26}_{P(M)}}$ (Formule de Bayes).

$P(R/M) \simeq 0,31$

LOI DES GRANDS NOMBRES

Suite de variables aléatoires $(X_i)_{i \in [1,n]}$.

Ces variables aléatoires sont indépendantes et de même loi.

Pour tout $k > 0$

$$\lim_{n \to +\infty} P(|\bar{X}_n - E(X_i)| > k) = 0$$

*interprétation de la proba comme une fréquence de la réalisation.

La moyenne empirique est un estimateur convergent de l'espérance. *

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} E(X_i)$$

Moyenne arithmétique des $(X_i)_{i \in [1,n]}$

Converge en probabilités vers l'espérance de X_i.

CONVERGENCE EN LOI

On a une suite de variable aléatoire Y : $(Y_i)_{i \in [1,n]}$.

$(Y_i)_{i \in [1,n]}$ converge en loi si $\forall x_0$, point de continuité de la fonction de répartition F_Y de Y :

$$\lim_{n \to +\infty} F_{Y_n}(x_0) = F_Y(y_0)$$

Ce sont les distributions qui convergent via leur fonction de répartition :

$$\left. Y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{L} Y \right\} \text{convergence en loi}$$

CONVERGENCE EN PROBABILITÉS

$\forall k > 0$

$$\lim_{n \to +\infty} P(|Y_n - Y| > k) = 0$$

$$Y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{P} Y$$

THÉORÈME CENTRAL LIMITE

ou théorème de la limite centrale.

$(X_i)_{i \in [1,n]}$ (hypothèse d'indépendance).

$E(X) = \mu$; $V(X) = \sigma^2$ (hypothèse de m loi et m variance finie).

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{L} Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$E(S_n) = n\mu$$

$$V(S_n) = n\sigma^2$$

$$\sigma^2(S_n) = \sigma\sqrt{n}$$

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

$$\bar{X}_n = \frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

$$\underbrace{\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \xrightarrow[n \to +\infty]{L} Z \sim \mathcal{N}(0,1)}$$

$$\sqrt{n} \times \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \xrightarrow[n \to +\infty]{L} \mathcal{N}(0,1)$$

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n \to +\infty]{L} \mathcal{N}(E(\overline{X}_n), Var(\overline{X}_n))$$

$$\overline{X}_n \xrightarrow[n \to +\infty]{L} \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} X_i}_{S_n} \sim \mathcal{N}(\underbrace{n\mu}_{E(S_n)}, \underbrace{n\sigma^2}_{Var(S_n)})$$

ex:

LA VARIABLE BINOMIALE

↳ Elle est bien une somme de variables aléatoires indépendantes

$X \sim \mathcal{B}(n, p)$

$E(X) = np$ $\quad V(X) = np(1-p)$

On peut approximer la loi binomiale : $B(n, p)$ par la loi normale $\mathcal{N}(np, np(1-p))$.

Applications:

5000 abonnés

0,2 → Probabilité qu'un abonné soit connecté

Les comportements des abonnés sont indépendants les uns des autres.

X → variable aléatoire qui compte le nombre d'abonnées connectés à un instant t.

X est le nombre de succès lors de la réalisation de 5000 épreuves aléatoires indépendantes.

Probabilité de réalisation de chaque épreuve : 0,2

$X \sim \mathcal{B}(n, p)$

$\rightarrow X \sim \mathcal{B}(5000, 0{,}2)$.

$E(X) = np = 5000 \times 0{,}2 = 1000$

$V(X) = np(1-p) = 800 \quad (5000 \times 0{,}2 \times 0{,}8)$

Approximation de la loi binomiale $\mathcal{B}(5000, 0{,}2)$ par la loi normale $\mathcal{N}(1000, 800)$.

NB / pour approximer, n doit être très grand. ($\approx n > 30$ dans les TD's).

Quantile 99% de $X \rightarrow P(X < x_s) = 0{,}99$

Rappel { Soit une probabilité s, le quantile x_s est tel que :
$P(X < x_s) = s$

$P(X < x_s) = 0{,}99$

Il faut considérer :

$$P\left(\frac{X-1000}{\sqrt{800}} < \frac{X_S-1000}{\sqrt{800}}\right) = 0,99$$

$$\Phi\left(\frac{X_S-1000}{\sqrt{800}}\right) = 0,99$$

↳ Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

$$\Longleftrightarrow \frac{X_S-100}{\sqrt{800}} = 2,33$$

On regarde la table de la loi normale centrée réduite.

$$\Longleftrightarrow X_S = 1066$$

Quantile 99,9 % ?

Faire à la maison, mêmes étapes.

Résultat $\Rightarrow X_S = 1087$

$$P(X \geqslant N) \leqslant 1\,\%$$

$$\Rightarrow P(X \geqslant N) \leqslant 0,01$$

$$\Longleftrightarrow P\left(\frac{X-1000}{\sqrt{800}} \geqslant \frac{N-1000}{\sqrt{800}}\right) \leqslant 0,01$$

$$\Rightarrow \underbrace{P\left(Y \geqslant \frac{N-1000}{\sqrt{800}}\right)}_{} \leqslant 0,01$$

↳ pas une fonction de répartition.

$$\Rightarrow 1 - \Phi\left(\frac{N-1000}{\sqrt{800}}\right) \leqslant 0,01$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{N-1000}{\sqrt{800}}\right) \geqslant 0,99$$

On regarde la table..

$$\frac{N-1000}{\sqrt{800}} \geq 2,33 \iff N-1000 \geq 65,90$$

$$\iff N \geq 1066$$

interprétation : (le point d'accès doit pouvoir gérer au moins 1066 connexions simultanées).

15.11 Soit n le nombre de réservations prises par la compagnie pour un vol donné.

On a S_n : le nombre de passagers se présentant à l'embarquement pour ce vol

0,1 → probabilité de désistement de chacun des passagers.

On peut considérer une distribution binomiale :

$$S_n \sim \mathcal{B}(n ; 0,9)$$

$$E(S_n) = 0,9n \; ; \; V(S_n) = 0,09n$$

$\Rightarrow np$ $\Rightarrow np(1-p)$

$\sigma(S_n) = \sqrt{0,09n} = 0,3\sqrt{n}$

$\Rightarrow \sqrt{V(X)}$

On cherche :

$P(S_n < 300) \geq 0,99$

$\rightarrow$ soit, dans l'exercice, 99% de chances de ne pas avoir à payer les dédommagements à des passagers.

Approximation par la loi normale :

$\mathcal{N}(0,9n \, ; \, 0,09n)$

$P(S_n < 300) \geq 0,99$

formule de normalisation. $\Leftrightarrow P\left(\frac{S_n - 0,9n}{0,3\sqrt{n}} \geq \frac{300 - 0,9n}{0,3\sqrt{n}}\right) \geq 0,99$

On regarde la table de la loi normale centrée réduite :

$\Rightarrow P(Y \leq t) \geq 0,99$

à partir de $t = 2,33$

$$\frac{300 - 0,9n}{0,3\sqrt{n}} \geq 2,33$$

$\Rightarrow 0,9n + 0,699\sqrt{n} - 300 \leq 0$

Solution positive de l'équation $\rightarrow 17,87$ $(= \sqrt{n})$.

$n = 319,45$

interprétation : Jusqu'à 319 réservations, au moins 99% de chances de ne pas payer de dédommagements à des passagers.
On passe par la loi normale car la fonction de répartition est plus simple
↳ ($F(X \geq x)$).

INÉGALITÉ DE MARKOV

Soit X une variable aléatoire avec une espérance finie et a un réel strictement positif.

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Application - exemple :
On considère que l'espérance de vie à la naissance est de 85 ans.
$\Rightarrow E(X) = 85$.

La probabilité de dépasser 100 ans est inférieure à : $P(X \geq 100) = \frac{85}{100}$ (85%)

INÉGALITÉ DE BIENAYMÉ - TCHEBYCHEV

Soit X une variable aléatoire avec une espérance finie et une variance finie et non nulle, ainsi que k un réel strictement positif :

$$P(|X - E(X)| \geq k) \leq \frac{V(X)}{k^2}$$

Une variable aléatoire prend, avec une faible probabilité, une valeur relativement lointaine de son espérance. (d'où le $\leq$).

Évènement complémentaire

$$\longrightarrow P(|X-E(X)| < k) \geq 1 - \frac{V(X)}{k^2}$$

Exemple :

$$X \sim \mathcal{B}(5000\,;\,0{,}2)$$

$E(X) = np = 5000 \times 0{,}2 = 1000$

$V(X) = np(1-p) = 5000 \times 0{,}2 \times 0{,}8 = 800$

Calculez le quantile 99% en utilisant l'inégalité de Bienaymé - Tchebychev :

$$P(|X - E(X)| < k) = 1 - \frac{V(X)}{k^2} = 0{,}99$$

$$\Longrightarrow 1 - \frac{800}{k^2} = 0{,}99$$

$$\Longrightarrow k^2 = 80000 \Longleftrightarrow k = 282{,}44$$

$$X = E(X) + 282{,}44 = 1282{,}44.$$

Quantile 0,999 ?

$$P(|X - E(X)| < k) = 1 - \frac{V(X)}{k^2} = 0{,}999$$

$k = 895\ (?)$

$X = E(X) + k = 1895.$

Chapitre 5 : Estimations

On a $(X_i)_{i \in [1,n]}$ une série de variables aléatoires indépendantes de même loi
$E(X_i) = \mu$
$V(X_i) = \sigma^2$

$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ → moyenne arithmétique des $(X_i)_{i \in [1,n]}$.

$E(\bar{X}_n) = \mu$ car $E(\bar{X}_n) = \frac{1}{n} \times n\mu = \mu$.
$V(\bar{X}_n) = V\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$.

$\Rightarrow \frac{1}{n^2} \times \underbrace{n \times \sigma^2}$ (pas de covariance car indépendantes, elles valent 0).

$V(X_1) + V(X_2) + \ldots + V(X_n)$.

~~La moyenne arithmétique est préférée car la variance~~

$\bar{X}_n$, la moyenne arithmétique est un meilleur estimateur par rapport à l'estimateur X_i, $\forall i$ car $\frac{\sigma^2}{n} < \sigma^2$.

BIAIS ET ESTIMATEURS SANS BIAIS

$\hat{\mu}_n$ estimateur de μ.

Biais de $\hat{\mu}_n$:

$$B(\hat{\mu}_n, \mu) = E(\hat{\mu}_n - \mu).$$

Un estimateur est sans biais quand son biais est égal à 0.

Erreur quadratique moyenne (EQM)

$$= E[(\hat{\mu}_n - \mu)^2] = B(\hat{\mu}_n, \mu)^2 + V(\hat{\mu}_n).$$

Si il y a un écart, il y a un biais.

Démonstration

$$(\hat{\mu} - \mu)^2 = [\underbrace{\hat{\mu} - E(\hat{\mu})}_{a} + \underbrace{E(\hat{\mu}) - \mu}_{b}]^2$$

$$\Rightarrow \overbrace{[\hat{\mu} - E(\hat{\mu})]^2}^{a^2} + \overbrace{2\,[\hat{\mu} - E(\hat{\mu})][E(\hat{\mu}) - \mu]}^{2ab} + \underbrace{[E(\hat{\mu}) - \mu]^2}_{b^2}.$$

$$\Rightarrow [\hat{\mu} - E(\hat{\mu})]^2 + 2\,[\hat{\mu} - E(\hat{\mu})]\,B(\hat{\mu}_n, \mu) + B(\hat{\mu}_n, \mu)^2.$$

On prend l'espérance mathématique de chaque côté :

EQM

$$E[(\hat{\mu} - \mu)^2] = E\{[\hat{\mu} - E(\hat{\mu})]^2\} + 2E[\hat{\mu} - E(\hat{\mu})]\,B(\hat{\mu}_n, \mu) + B(\hat{\mu}_n, \mu)^2.$$

$V(\hat{\mu}_n)$

$V(X) = E\{(X - E(X))^2\}$.

$E(\hat{\mu}) - E(\hat{\mu}) = 0$

donc, $\text{EQM} = E[(\hat{\mu} - \mu)^2]$

$$\Rightarrow B(\hat{\mu}_n, \mu)^2 + V(\hat{\mu}_n).$$

Il n'y a pas que les biais qui comptent, des fois *B>0 car notre variance est beaucoup plus faible par rapport à celle d'un autre estimateur.

* on choisit un ...

ESTIMATEUR CONVERGENT

Un estimateur est convergent si il converge en probabilité vers la vraie valeur qui estime :

$$\hat{\mu}_n \xrightarrow[n \to +\infty]{P} \mu$$

$$\lim_{n \to +\infty} P(|\hat{\mu}_n - \mu| > k) = 0$$

En pratique :

$$\lim_{n \to +\infty} EQM(\hat{\mu}_n) = 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} B(\hat{\mu}_n, \mu) = 0$$

et $\lim_{n \to +\infty} V(\hat{\mu}_n) = 0$

VRAISEMBLANCE

Probabilité des observations d'un échantillon relativement à une hypothèse sur la distribution de ces observations :

Série $(x_i)_{i \in [1,n]}$

Hypothèse D

$P(X = x_i | D) = P_i$

Probabilité d'observer l'échantillon :

$L(x_1, x_2, \dots, x_n | D) = \underbrace{\Pi_{i=1}^{n} P_i}$

produit des probabilités de chacune des observations (on suppose que le tirage de chaque observation est indépendant).

LOI DE PROBABILITÉ CONTINU

$L(x_1, x_2, \dots, x_n | C) = \Pi_{i=1}^{n} f(x_i | c)$.

LOG-VRAISEMBLANCE (logarithme de la vraisemblance).

Cas discret :

$$\ln [L(x_1, x_2, \dots, x_n | D) = \ln \left(\Pi_{i=1}^{n} P(X = x_i)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \ln (P(X = x_i)).$$

Cas continu :

$$\ln (L(x_1, x_2, \dots x_n | C) = \ln \left(\Pi_{i=1}^{n} f(x_i)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \ln (f(x_i)).$$

MÉTHODE DU MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE

$\hat{\lambda}_{MV}$ → estimateur qui rend maximale la vraisemblance des observations:

CPO: $\left.\dfrac{d\ln(\mathcal{L}(x_1, x_2 \ldots, x_n|\lambda))}{d\lambda}\right|_{\lambda = \hat{\lambda}_{MV}} = 0.$

CSO: $\left.\dfrac{d^2\ln(\mathcal{L}\ldots)}{d\lambda^2}\right|_{\lambda = \hat{\lambda}_{MV}} < 0$

Propriétés de l'estimateur du MV:

L'estimateur du maximum de vraisemblance est:

→ Asymptotiquement convergent } ⇒ cas de variance

→ Asymptotiquement efficace } minimale

→ Asymptotiquement normalement distribué

Exemple: Durée écoulée jusqu'à la $K^{ième}$ occurrence d'un évènement poisson de paramètre λ.

$\lambda\tau = \mu$ (nbr moy. d'occurrences dans un intervalle)

Proba de K occurrences dans un intervalle τ:

$$f(k) = \frac{(\lambda\tau)^k e^{-(\lambda\tau)}}{k!}$$ loi de poisson.