$f_{MF}(m, f)$ densité jointe ?

$f_{MF}(m, f)$ est une densité de probabilité si et seulement si $c = \frac{1}{20000}$

démonstration :

$\forall m$ et $\forall f$, $f_{MF}(m\,f) \geq 0$

et $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{MF}(m, f)\, dm\, df = 1$

$$\int_0^{20} \int_0^{20} c\,(3m + 2f)\, dm\, df = 1.$$

$$c \left[\frac{3}{2} m^2 + 2fm\right]_0^{20} = c\,(600 + 40f)$$

$$c \int_0^{20} (600 + 40f)\, df = c \left[600f + 20f^2\right]_0^{20}$$

$$= c\,(12\,000 + 8\,000) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad c = \frac{1}{20000}$$

Loi marginale de M

$$f_M(m) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{MF}(m, f)\, df$$

$$= \frac{1}{20\,000} \int_0^{\infty} 3m + 2f \, df$$

$$(=) \frac{1}{20000} \left[3mf + 2\frac{f^2}{2}\right]_0^{20}$$

$$= \frac{60m + 400}{20\,000}.$$

$$f_M(m) = \begin{cases} \frac{3m+20}{1000} & \text{si } 0 \leq m \leq 20 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Loi marginale de F

$$f_M(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{MF}(m, f)\, dm$$

$$= \frac{1}{20\,000} \int_0^{20} 3m + 2f \, dm$$

$$= \frac{1}{20\,000} \left[\frac{3m^2}{2} + 2fm\right]_0^{20}$$

$$= \frac{600 + 40f}{20000}$$

$$\Rightarrow f_F(f) = \begin{cases} \frac{15+f}{500} & \text{si } 0 \leq f \leq 20 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

rattraper ✓
Cours 4.

Loi marginale de F

$$f_F(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{MF}(mf)\, dm$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{20\,000} \int_0^{20} 3m + 2f \quad dm$$

$$= \frac{1}{20\,000} \left[\frac{3m^2}{2} + 2fm\right]_0^{20}$$

$$= \frac{600 + 40f}{20\,000}.$$

soit $f_F(f) = \dfrac{15 + f}{500}$

$$f_{MF}(mf) = \begin{cases} c(3m + 2f) & 0 < m < 20 \text{ et } 0 < f < 20 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est une densité jointe avec $c = \dfrac{1}{20\,000}$

$$P(M \geq 10 / F = 16) = \int_{10}^{+\infty} g_M(m / f = 16)\, dm$$

$$g_M(m/f) = \frac{f_{MF}(m, f)}{f_F(f)} = \frac{(3m + 2f)/20\,000}{(600 + 4f)/20\,000}$$

$$= \frac{3m + 2f}{600 + 4f} \quad \text{si} \quad \begin{matrix} 0 < m < 20 \\ 0 < f < 20 \end{matrix}$$

$$P(M \geq 10 / F = 16) = \int_{10}^{20} \frac{3m + 2f}{600 + 40f}\Big|_{f = 16} dm$$

$$\Rightarrow \int_{10}^{20} \frac{3m + 32}{600 + 640}\, dm$$

$$= \frac{1}{1240}\left[\frac{3m^2}{2} + 32m\right]_{10}^{20}$$

$$= \frac{1}{1240}(600 + 640 - 150 - 320)$$

$$= 0{,}62$$

$$g_F(f \mid M \leq m^*) = \int_{-\infty}^{m^*} g_F(f \mid M = m)\, dm$$

$$= \int_{-\infty}^{m^*} \frac{f_{MF}(m,f)}{f_M(m)}\, dm$$

$$= \int_0^{m^*} \frac{(3m+2f)/2000}{(3m+20)/1000} = \int_0^{m^*} \frac{3m+2f}{20(3m+20)}\, dm$$

$$= \int_0^{m^*} \frac{1}{20}\left(\frac{3m+20-20+2f}{3m+20}\right)$$

$$= \int_0^{m^*} \frac{1}{20}\left(1 + \frac{2f-20}{3m+20}\right) dm.$$

la pimitive de $\frac{u'(x)}{u(x)}$ est $\ln(u(x))$.

$u(x) = 3m + 20$; $u'(x) = 3$

$$= \int_0^{m^*} \frac{1}{20}\left(1 + \frac{2f+20}{3}\,\frac{3}{3m+20}\right) dm$$

$$= \frac{1}{20}\left[m + \frac{2f+20}{3}\ln(3m+20)\right]_0^{m^*}$$

$$= \frac{1}{20}\left[m^* + \frac{2f+20}{3}\ln(3m^*+20) - 0\right.$$

$$\left. + \frac{2f-20}{3}\ln(20)\right].$$

$$g_F(f \mid M \leq m^*) = \begin{cases} 0 \text{ si } m^* < 0 \text{ ou } f < 0 \text{ ou } f > 20 \\ \frac{1}{20}\left[m^* + \frac{2f-20}{3}\left(\ln 3m^* + 20 - \ln(20)\right)\right] \text{ si } 0 \leq m^* < 20 \text{ et } 0 \leq f \leq 20 \\ f_F(f) \text{ si } m^* > 20 \end{cases}$$

avec $m^* = 8 \Rightarrow \frac{1}{20}\left[8 + \frac{2f-20}{3}\left(\ln(44) - \ln(20)\right)\right]$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{10}\left(4 + \frac{f-10}{3}\ln\left(\frac{11}{5}\right)\right)$$

$$= g_F(f / M \leq 8)$$

$$Cov(M,F) = E(MF) - E(M)E(F)$$

$$E(MF) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} mf\, f_{MF}(m,f)\, dm\, df$$

$$\Rightarrow \frac{1}{20\,000}\int_0^{20}\underbrace{\int_0^{20} 3m^2 f + 2m f^2\, dm}_{= \left[m^3 f + m^2 f^2\right]_0^{20}}\, df$$

$$\Rightarrow 8000f + 400f^2$$

$$= \frac{1}{100}\int_0^{20} 40f + 2f^2\, df = \frac{1}{100}\left[20f^2 + \frac{2f^3}{3}\right]_0^{20}$$

$$= \frac{1}{100}\left(8000 + \frac{1600}{3}\right)$$

$$= \frac{400}{3} = 133,33 = E(MF).$$

$$Cov(M,F) = E(MF) - E(M)E(F)$$

$$E(M) = \int_{-\infty}^{+\infty} m\, f_M(m)\, dm$$

Avec : $f_M(m) = \dfrac{3m+20}{1000}$.

$$\Rightarrow \int_0^{20} m\, \frac{3m+20}{1000}\, dm = \int_0^{20} \frac{3m^2+20m}{1000}\, dm$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1000}\left[m^3 + 10m\right]_0^{20} = \frac{12\,000}{1000}.$$

$$\Rightarrow E(M) = 12.$$

$$E(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\, f_F(f)\, df$$

$$\Rightarrow E(F) = \int_0^{20} f\, \frac{30+2f^2}{1000}\, df$$

$$\Rightarrow = \frac{1}{1000}\left[\frac{30f^2}{2} + \frac{2f^3}{3}\right]_0^{20}$$

$\Rightarrow \cancel{\frac{1000}{3} \ldots}$.

$\Rightarrow \cancel{E}$ (suite) $\Rightarrow \dfrac{\frac{12000}{2} + \frac{16\,000}{3}}{1000} = 11,33$

$$\Rightarrow E(F) = 11,33$$

$$\boxed{Cov(M,F) = E(MF) - E(M)E(F)}$$

$\Rightarrow Cov(M,F) = 133,33 - 12 \times 11,3$

$Cov(M,F) \simeq -2,3 < 0$

coefficient de corrélation négatif. une variable augmente et l'autre diminue.

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 3/4 + x - xy & \text{si } x \in [0;1] \\ & \quad\ y \in [0;1]. \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$Cov(X,Y)$?

$$\boxed{Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)}$$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\, f_{XY}(x,y)\, dx\, dy$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \underbrace{\int_0^1 \frac{3}{4}xy + x^2y - x^2y^2\, dx}_{=\left[\frac{3}{4}\frac{x^2}{2}y + \frac{x^3}{3}y - \frac{x^3}{3}y^2\right]_0^1}\, dy$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{3y}{8} + \frac{y}{3} - \frac{y^2}{3}\, dy$$

$$= \left[\frac{3y^2}{16} + \frac{y^2}{6} - \frac{y^3}{9}\right]_0^1 = \frac{3}{16} + \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{35}{144}$$

donc $E(XY) = \frac{35}{144}$.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx$$

avec : $f_X(x) = \begin{cases} 3/4 + 1/2\, x & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$E(X) = \int_0^1 \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}x^2\,dx$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{3x^2}{4 \times 2} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{8} + \frac{1}{6} = \frac{13}{24}$$

donc $E(X) = \frac{13}{24}$.

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\,dy$$

$$= \int_0^1 y\left(\frac{5}{4} - \frac{1}{2}y\right)dy$$

$$= \int_0^1 \frac{5}{4}y - \frac{1}{2}y^2\,dy$$

$$= \left[\frac{5}{4}\frac{y^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{5}{8} - \frac{1}{6} = \frac{11}{24}$$

donc $E(Y) = \frac{11}{24}$

$$\boxed{Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)}$$

$$Cov(X,Y) = \frac{35}{144} - \frac{13}{24} \times \frac{11}{24}$$

$$Cov(X,Y) = \frac{3}{576}$$

Cas discret

$$E(XY) = \sum_x \sum_y xy \, P(X = x_i, Y = y_j)$$

Indépendance

$\forall (x,y)$: $\boxed{P(X=x, Y=y) = P(X=x) \times P(Y=y)}$

Covariance ⇒ elle est égale à 0 mais cela n'implique pas forcément une indépendance.

Cas continu

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy \, f_{XY}(xy) \, dx \, dy$$

(X et Y des variables aléatoires continues).

Soit $F_{XY}(x,y)$ la fonction de répartition jointe.

$$F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(xy)\,dx\,dy.$$

Soient $F_X(x)$ et $F_Y(y)$ les fonctions de répartition marginales.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \underbrace{f_X(x)}_{\text{densité marginale de } X}\,dx$$

$\hookrightarrow f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(xy)\,dy$

et

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} \underbrace{f_Y(y)}_{\text{densité marginale de } Y}\,dy.$$

$\hookrightarrow f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(xy)\,dx$

$\forall x, y$, X et Y sont indépendantes si et seulement si :

fct° de répartition jointe

$$\boxed{F_{XY}(x,y) = \underbrace{F_X(x)\,F_Y(y)}_{\text{fonctions de répartition marginales}}.}$$

X et Y valeurs aléatoires continues

$f_{XY}(x, y)$ -> densité jointe

$f_X(x)$ -> densité marginale de X.

$f_Y(y)$ -> densité marginale de Y.

X et Y sont indépendantes si et seulement si :

$\forall x, y$, on a :

$$\boxed{f_{XY}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)}$$

(et leur covariance sera nulle)

$X \overset{\longrightarrow}{\underset{\longleftarrow}{\text{indépendants}}} Y$

$\Rightarrow E(XY) = E(X)\,E(Y)$

donc $Cov(X,Y) = 0$.

⚠ la réciproque n'est pas toujours vraie.

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} cxy^2 & \text{si } 0 \leq x \leq \sqrt{2} \text{ et } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$f_{XY}(x, y)$ fonction de densité jointe ?

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^{\sqrt{2}}\underbrace{\int_0^1 cxy^2\,dy}\,dx = 1$$

$$\iff \int_0^1 cxy^2\,dy = \left[cx\,\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{cx}{3}.$$

$$\iff \left[\frac{cx^2}{6}\right]_0^{\sqrt{2}} = 1 \iff \frac{2c}{6} = 1 \iff c = 3.$$

$f_{XY}(x,y)$ non-négativité :

$\forall x,y,\ f_{XY}(x,y) \geq 0$ ok.

Loi marginale de X

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = f_X(x).$$

$$\Rightarrow \int_0^1 cxy^2\,dy = \left[cx\,\frac{y^3}{3}\right]_0^1$$

on sait que $c = 3$;

$\frac{cx}{3} = x$ (car $\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}}$).

Loi marginale de Y

$$f_Y(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dx.$$

$= \int_0^{\sqrt{2}} cxy^2 \, dx$

$= \left[\frac{cx^2 y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{2}}$

$c = 3$ donc : $\frac{3 \times \sqrt{2}^2 \times \cancel{2} y^2}{2} = \frac{3 \times y^2 \times 2}{2}$

$= 3y^2$.

$f_X(x) = x$

$f_Y(y) = 3y^2$

on a X et Y indépendants

$f_{XY}(x,y) = 3xy^2 = f_X(x) f_Y(y)$

$= x 3y^2 = 3xy^2$. oui ! car la

densité jointe est égale au produit des densités marginales.

18.10

Coefficient de corrélation

X et Y deux variables aléatoires

$$COR(X,Y) = r = \boxed{\frac{COV(X,Y)}{\delta_X \delta_Y}}$$

$$= \frac{E[(X-E(X))(Y-E(Y))]}{\delta_X \ \delta_Y}$$

$$= \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\delta_X \ \delta_Y}$$

NB/ δ_X et δ_Y sont des écarts-type.

$$\delta_X = \sqrt{E[(X-E(X))^2]} = \boxed{\sqrt{E(X^2) - E(X)^2}}$$

$$\delta_Y = \sqrt{E[(Y-E(Y))^2]} = \boxed{\sqrt{E(Y^2) - E(Y)^2}}$$

LOI DE BERNOULLI

C'est une distribution discrète de probabilités

$$\boxed{P(Y=y) = p^y (1-p)^{1-y}}$$

$y \in \{0,1\}$.

On va calculer la valeur de l'espérance :

Espérance d'une variable aléatoire de Bernoulli :

$E(Y) = \sum y \, P(Y = y) = 1 \times p + 0(1-p)$

$\Rightarrow \boxed{E(Y) = p}$

On va calculer la valeur de la variance.

$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$
$V(Y) = \sum y^2 \, P(Y = y) - p^2$
$V(Y) = 0^2 (1-p) + 1^2 p - p^2$
$V(Y) = p - p^2 = \boxed{p(1-p)} \; (= V(Y))$

LOI BINOMIALE

Distribution discrète de probabilités

Expérience binomiale :
- série de n tirés identiques
- deux évènements possibles à chaque tirage (succès, échec).
- la probabilité de succès p

ne se modifie pas d'un tirage à l'autre.
- les tirages sont indépendants

$$X \sim \mathcal{B}(\underbrace{n}_{\text{nombre de tirages identiques}}, \underbrace{p}_{\text{proba de succès}})$$

$$\boxed{P(X=x) = f(x) = \underbrace{C_x^n}_{\text{coefficient binomial}} p^x (1-p)^{n-x}}$$

$$\boxed{C_x^n = \binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}} = \frac{n(n-1)\dots 1}{x(x-1)\dots 1 \times (n-x)(n-x-1)\dots 1}$$

Espérance d'une loi binomiale.

$X \sim \mathcal{B}(n, p)$

$E(X) = np$

Démonstration :

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$\Rightarrow \sum_{x=0}^{n} x \times \frac{n!}{x!(n-x)!} \times p^x (1-p)^{n-x}$$

$$\Rightarrow \sum_{x=1}^{n} x \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

NB / $x! = x(x-1)!$

$$\Rightarrow \sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x} (1-p)^{n-x}$$

$$= np \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x-1} (1-p)^{n-x}$$

$a = x - 1$

$b = n - 1$

$\Longrightarrow x = a + 1$

$n = b + 1$

$n - x = b - a$

$$\sum_{x=1}^{n} = \sum_{a=0}^{n-1} = \sum_{a=0}^{b}$$

$$\Longrightarrow np \sum_{a=0}^{b} \frac{b!}{a!(b-a)!} p^{a} (1-p)^{b-a}$$

$$= np \underbrace{\sum_{a=0}^{b} P(Y = a)}$$ avec

$Y \sim (b, p)$.

→ Somme de toutes les probabilités (évènement certain = 1).

$E(X) = np$

$1 = np$.

FORMULE DU BINÔME DE NEWTON :

$$\boxed{\sum_{a=0}^{b} \frac{b!}{a!\,(b-a)!} p^a (1-p)^{b-a} = [p + (1-p)]^b = 1^b = 1}$$

Variance $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

avec $\boxed{E(X)^2 = n^2 p^2}$

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{n} x^2 \frac{n!}{x!\,(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x \frac{n!}{(x-1)!\,(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= \sum_{x=1}^{n} x \frac{n!}{(x-1)!\,(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= np \sum_{x=1}^{n} x \frac{(n-1)!}{(x-1)!\,(n-x)!} p^{x-1} (1-p)^{n-x}$$

Pour simplifier, on a :

$a = x - 1 \iff x = a + 1$

$b = n - 1 \iff n = b + 1$

$n - x = b - a$

$$= np \sum_{a=0}^{b} (a+1) \frac{b!}{a!\,(b-a)!} p^a (1-p)^{b-a}$$

$$= np \sum_{a=0}^{b} (1) \frac{b!}{a!\,(b-a)!} p^a (1-p)^{b-a}$$

$$+ np \sum_{a=0}^{b} a \frac{b!}{a!(b-a)!} p^a (1-p)^{b-a}$$

On sait que :

$$\sum_{a=0}^{b} 1 \times \frac{b!}{a!(b-a)!} p^a (1-p)^{b-a}$$

$= 1$ d'après la formule du binôme de Newton

et $$\sum_{a=0}^{b} a \frac{b!}{a!(b-a)!} p^a (1-p)^{b-a}$$

$\Rightarrow$ espérance d'une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $B(b, p)$.

$$E(x^2) = np\, 1 + np\,(b\, p)$$
$$= np + np\,[(n-1)p]$$
$$= np + n^2p^2 - np^2$$

$$V(x) = \underbrace{E(x^2)}_{} - \underbrace{E(x)^2}_{}$$

$$\Longrightarrow \overbrace{np + \cancel{n^2p^2} - np^2}\ \overbrace{- \cancel{n^2p^2}}$$

$$V(x) = \boxed{np\,(1-p)}$$

LOI DE POISSON

$$X_n \sim B(n, p) \rightarrow \lim_{n \to \infty} X_n = X_p$$

Avec : $X_p \sim P(np)$

Variable aléatoire discrète.

Elle est utile pour décrire le nombre d'occurences d'un évènement au cours d'un intervalle de temps ou d'un espace bien défini

$$P(X=x) = f(x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}$$

$f(x) \rightarrow$ probabilité de x occurences dans un intervalle.

$\boxed{\mu = E(X)} \longrightarrow$ nombre moyen d'occurrence dans un intervalle.

$$\boxed{E(X) = \sum x f(x)}$$

$$\Rightarrow E(X) = \sum x \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}$$

$$= \sum \frac{\mu^x e^{-\mu}}{(x-1)!} = \sum \frac{\mu \mu^{x-1} e^{-\mu}}{(x-1)!}$$

$$\Rightarrow \mu \sum \frac{\mu^{x-1} e^{-\mu}}{(x-1)!}$$

$$\Rightarrow \mu e^{-\mu} \underbrace{\sum \frac{\mu^{x-1}}{(x-1)!}}_{= e^{\mu}}$$

$$E(X) = \mu e^{-\mu} e^{\mu} = \mu$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) - \mu^2$$

$$E(X^2) = \sum x^2 f(x)$$

$$E(X^2) = \sum x^2 \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}$$

$$\Rightarrow \sum x \frac{\mu^x e^{-\mu}}{(x-1)!} = e^{-\mu} \sum x \frac{\mu^x}{(x-1)!}$$

$$= e^{-\mu} \sum \frac{(x-1+1)\mu^x}{(x-1)!} = e^{-\mu} \left[\sum \frac{(x-1)\mu^x}{(x-1)!} + \sum \frac{\mu^x}{(x-1)!} \right]$$

$$\Rightarrow e^{-\mu} \left[\sum \frac{(x-1)\mu^x}{(x-1)!} + \mu \sum \frac{\mu^{x-1}}{(x-1)!} \right]$$

$$\Rightarrow e^{-\mu} \left[\sum \frac{(x-1)\mu^x}{(x-1)!} + \mu e^{\mu} \right]$$

$$= e^{-\mu}\left[\sum \frac{\mu^x}{(x-2)!} + \mu e^{\mu}\right]$$

$$= e^{-\mu} \sum \frac{\mu^x}{(x-2)!} + \mu$$

$$= e^{-\mu}\mu^2 \sum \frac{\mu^{x-2}}{(x-2)!} + \mu$$

$$= e^{-\mu}\mu^2 e^{\mu} + \mu = \mu^2 + \mu = \mu(1+\mu).$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$V(X) = \mu^2 + \mu - \mu^2 = \mu$$

$$\boxed{V(X) = \mu}$$

Intérêt de l'approximation d'une loi binomiale par une loi de poisson :

↓

$$P(X = x) = f(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

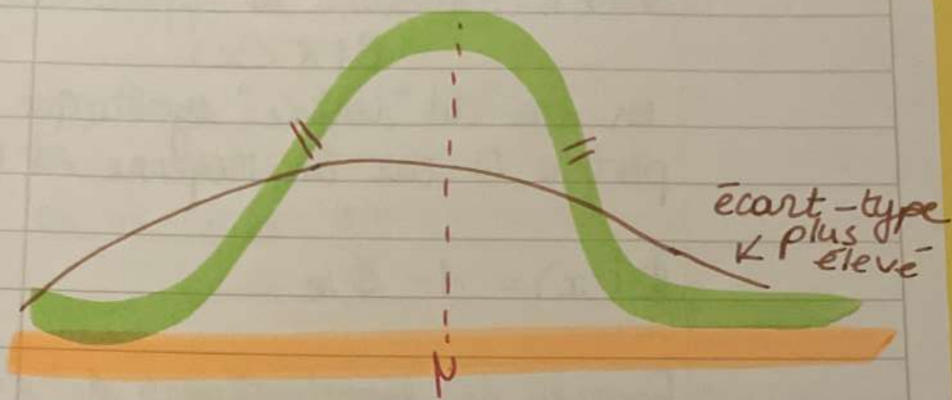
LOI NORMALE

Fonction de densité de probabilité normale : $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$\mu \rightarrow$ moyenne.

$\sigma \rightarrow$ écart-type.

Courbe symétrique par rapport à μ



La moyenne est également la médiane et le mode.

$$P(X \leq \mu) = 0,5$$

95,4 % des valeurs d'une variable aléatoire normale sont comprises dans l'intervalle :

$$[\mu - 2\sigma \ ; \mu + 2\sigma].$$

99,7 % des valeurs d'une variable aléatoire normale

$$\in [\mu - 3\sigma \ ; \mu + 3\sigma].$$

Cours du 25.10.

Loi normale centrée réduite

↳ fonction de densité normale réduite soit $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$

$\Phi(x)$: fonction de répartition
$P(X < x)$

on l'a dit "centrée" symétrique par rapport à 0 car la moyenne est 0.

$$\boxed{\Phi(-x) = 1 - \Phi x}$$

Formule de normalisation : de $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ à $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

$$\boxed{Z = \frac{X-\mu}{\sigma}}$$

X et Y deux variables aléatoires normales et indépendantes
$X \sim \mathcal{N}(\mu_x; \sigma_x^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(\mu_y, \sigma_y^2)$

$$\boxed{E(X+Y) = \mu_x + \mu_y}$$

$X+Y \sim \mathcal{N}(\mu_x \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2)$

Exercice d'application :
X → nombre de désintégrations de substance radioactive durant un intervalle de temps de 10 secondes.
On a une loi de Poisson de paramètre 9.

NB, on peut approximer une loi binomiale par une loi normale

$$\mathcal{B}(n,p) \xrightarrow[n \to +\infty]{} N(np, np(1-p))$$

$$\boxed{P(X=x) = f(x) = \frac{\sigma^{x} e^{-\sigma}}{x!}}$$

on a : $E(x = 9)$
$V(x = 9)$.

9 → nombre moyen de désintégrations dans un intervalle de 10 secondes.

σ : écart - type $= \sqrt{9} = 3$