Macroéconomie : Croissance

Partie 1 : Le modèle de Solow et ses prédictions

Chapitre 1 : Le “modèle prototype” de Robert Solow

On va commencer par voir le modèle de base : le modèle prototype d’après Solow.

L’article qui présente pour la première fois ce modèle est publié en 1956 : “Une contribution à la théorie de la croissance économique”.

Un autre article est important, il est paru en 1957 où il fait l’application empirique de ce modèle, il utilise un cadre théorique pour fonder un exercice économétrique qui lui permet de discuter les moteurs de la croissance.

« J’ai une préférence pour les modèles très simples. Je ne crois pas que de tels modèles conduisent directement à des prescriptions de politique économique ou même à des diagnostics détaillés. (...) Ils sont plutôt des exercices de reconnaissance. Si vous voulez savoir ce qui se trouve dehors, envoyez deux ou trois types en baskets pour observer le terrain et savoir s’il pourra accueillir une vie humaine. S’il apparaît qu’il est utile de s’y installer alors cela requiert une opération de plus grande ampleur.» (1970: 105) ⇒ la portée est limitée. Ce n'est pas une description de l’économie américaine dans toute sa complexité. C’est, au contraire, une vision très schématique du phénomène de la croissance. Avec, cette représentation, on ne peut pas adopter des prescriptions de politique économique.

Si on veut vraiment comprendre le fonctionnement de la croissance dans toute sa complexité, il faudrait des modèles plus compliqués/complets. On ne sait pas très bien s’il y croit vraiment (ambiguïté chez Solow).

Le modèle de Solow est une façon de poser la croissance de manière claire et simple qui essaie de capter les caractéristiques essentielles de la croissance économique.

À l'origine, l'idée est de comprendre quelle est une trajectoire idéale de croissance pour une économie capitaliste telle que les USA, puis, il faut d'autres modèles pour des perspectives de politique économique.

1. **Hypothèses simplificatrices**

- Description générale de l'économie

Comment le modèle décrit l'économie de marché ? C'est une économie à un seul bien. Ce bien est produit et consommé. C'est aussi le seul actif, c'est le bien que l'on va épargner et investir, il forme donc aussi le capital de l'économie. *On parle de "gelée" → bien informe qui sert à tout.*

Dans ce monde-là, il n'y a que deux types d'agent économique : les travailleurs et les entreprises. Ce sont deux centres de décision. Les entreprises, en s'inspirant de la théorie néoclassique, on va supposer qu'elles sont la propriété des travailleurs (il n'y a pas de capitalistes).

Dans cette économie, il y a trois marchés :

- Marché des biens
- Marché du travail
- Marché de la location du capital → en un sens, il n'y a ni titre, ni monnaie, les individus accumulent du capital, ils l'épargnent (constitution d'un patrimoine). Cette accumulation peut être louée aux entreprises.

Dont les trois prix sont : p1, p2 et p3
On s'intéresse aux prix relatifs ⇒ $p1/p1 = 1$; $p2/p1$ ($=w$) ; $p3/p1$ ($=r + \delta$).
Dans cette économie, il n'y a pas de monnaie. On va compter les prix en kilos du bien.

Le prix du travail est un prix en quantité de bien.
Le prix du travail est noté w, c'est le salaire que les travailleurs perçoivent qui correspond à une quantité de biens.

Le prix du capital ($r + \delta$) est aussi une quantité.

Si on compte tous les prix en monnaie, alors le prix de la monnaie est constant (égal à 1).

On suppose que la concurrence est parfaite, les agents sont preneurs de prix, il n'y a pas de rente de monopole. Cela veut dire que la règle "les facteurs sont rémunérés à la productivité marginale" va s'appliquer.

Cela suppose que les prix et les salaires sont parfaitement flexibles.

Dans cette économie, on ne parlera jamais de la monnaie. Pourquoi oublie-t-on la monnaie quand on parle du long terme ? Car d'après la théorie quantitative de la monnaie, la monnaie est neutre; cela veut dire qu'à long terme, les prix vont s'ajuster et une augmentation de la quantité de monnaie n'a aucun effet sur l'économie. “la monnaie est un voile” quand on se trouve dans un univers de long terme.

Les titres disparaissent aussi. On suppose qu'on est dans un monde sans friction, tout est parfait, la finance est de trop, la façon dont elle est organisée n'a pas d'importance.

On n'a pas de chômage non plus, dans la vision du long terme, tout s'ajuste parfaitement. Nous sommes toujours en situation de plein-emploi.

- Comportement des ménages

Contrainte budgétaire (à l'instant *t*):

$$\boldsymbol{wL^S + (r+\delta)K^S + bénéfices = C + I}$$

Offre de travail: $L^S = L_t \quad \text{mais} \;\; L_t = L_0 e^{nt}$ **(au niveau agrégé)**

Offre de capital: $K^S = K_t = \sum_{i=1}^{L_t} k_{it}$

Comportement d'épargne: $S = I = sY \; ou \; C = (1-s)Y$

où $I \equiv \delta K + \dot{K}$ **(investissement brut)**

Ici, on a la contrainte budgétaire agrégée de tous les travailleurs.

$S \rightarrow$ “supply” représente l'offre.

$L \rightarrow$ nombre de travailleurs.

$w \rightarrow$ salaires

$w.L \rightarrow$ masse salariale

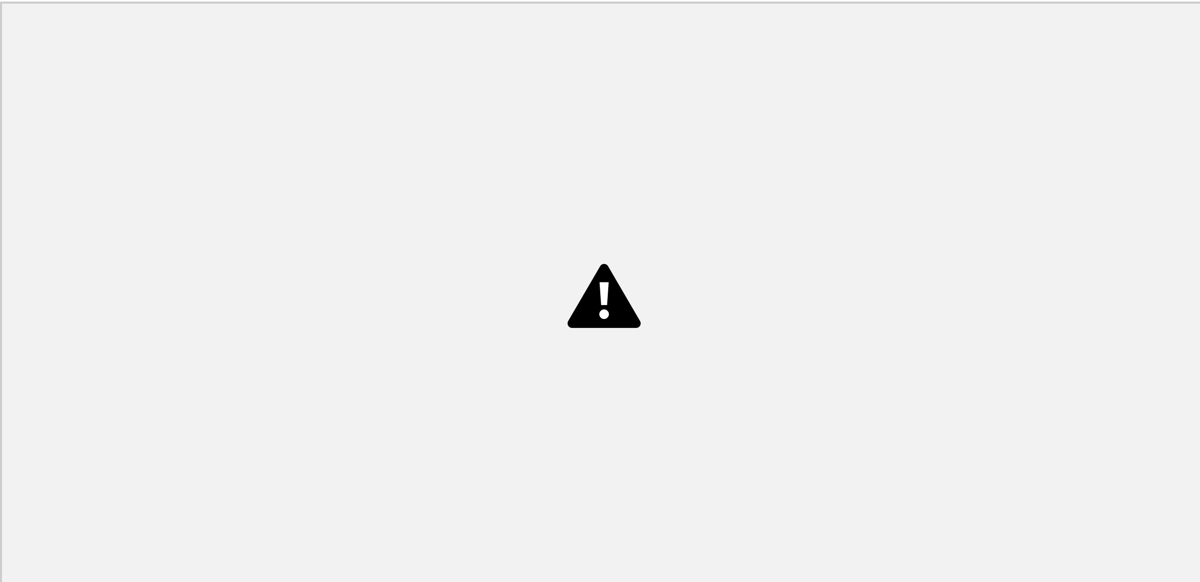
À ces revenus salariaux, on rajoute les revenus du capital car ces travailleurs accumulent du capital qui est loué aux entreprises.

Revenus possibles pour les travailleurs (3) : les salaires, les revenus du capital ou les bénéfices. Ces derniers vont être nuls car on est en situation de concurrence parfaite.

Dépenses du ménage → le ménage a des choix limités, soit il dépense (consommation, les biens sont détruits), soit il achète des biens qu'il met de côté (stock de capital loué aux entreprises). Ici, il n'y a pas d'écart entre l'épargne et l'investissement, les deux sont d'un montant équivalent.

L'offre de travail est croissante par rapport au nombre de travailleurs, tout le monde souhaite travailler.

Progression de l'offre de travail au cours du temps :



L'offre de travail est définie par rapport au temps, fonction du temps. On est dans une approche dynamique qui s'intéresse à l'évolution de l'économie à travers le temps. Cette évolution va être fixée.

Son évolution est caractérisée par une fonction exponentielle de n et de t. Cela implique que le taux de croissance de la population (g) a un temps continu.

$L0$ → l'offre de travail à la date $t0$.

Dans ce modèle, on suppose que le taux de croissance de la population est fixé, c'est un paramètre.

L'offre de travail est fixe.

$L^s = L \qquad L^t = L_0 e^{nt}$

$\ln L(t) = \ln L_0 + \ln e^{nt}$

$\left.\begin{array}{l} \ln x^a = a \ln x \\ \ln e^a = a \ln e \Leftrightarrow a \end{array}\right.$

$\ln L(t) = \ln L_0 + nt$

$g_L = 0 + n$

$\boxed{g_L = n}$

L’offre de capital est le capital accumulé par les travailleurs, c’est la somme des capitaux détenue par les individus. À chaque instant, l’offre de capital est constante.

K → capital global
k → capital d’un individu

Dans le modèle de Solow, les comportements des individus sont très simples (plutôt keynésiens). On offre tout notre travail et notre capital, on a un choix intertemporel entre l’épargne et l’investissement.

On suppose que le taux d’épargne est le même pour tous les individus. En moyenne, tout le monde épargne 15% de son revenu.

Une autre façon de déterminer l’investissement est d’estimer que c’est l'augmentation du stock de capital dans l'économie. Cette augmentation va avoir deux composantes :

- partie qui sert à renouveler le stock de capital à chaque instant (K+δ)
- partie d’investissement net

Dans le comportement des ménages, il n’y a aucun choix optimisateur, que des règles simples.

- Comportement des entreprises

- Contrainte budgétaire: $Y^s = wL^D + (r + \partial)K^D + bénéfices$
- Problème: minimiser $Min\ wL + (r + \delta)K\ sc\ \bar{Y} = F(K, L)$

En agrégé, ce que gagnent les entreprises c'est la valeur de la production (Ys). En vendant ces biens, elles ont un revenu qui va être utilisé pour financer les dépenses des entreprises :

- Rémunérations de leurs travailleurs (masse salariale w.L qui dépend de leur demande de travail)
- stock de capital (r+δ)
- S'il leur reste de la production qui n'a pas servi à rémunérer leurs salariés ou leur loueur de capital, elles ont un bénéfice qui sera redonné aux travailleurs.

Quel est le problème de l'entreprise ? Compte tenu de la nature de la fonction de production, elle procède en deux temps. 1) elle cherche à minimiser son coût pour un niveau de production donné. 2) en fonction de ce qu'il se passe, elle va varier le niveau de la production.

Quelle est la technique qui permet de minimiser les coûts de production ?
On suppose la fonction de production néoclassique qui est le cœur de la théorie néoclassique. Le catalogue des techniques est infini, on peut mélanger les facteurs travail et capital dans toutes les proportions imaginables.

COÛTS → coûts du travail + du capital. On a une contrainte (qui est la fonction de production), d'où utilisation du lagrangien.

On annule les dérivées du Lagrangien $L = wL + (r+\delta)K \ - \mu F(K,L)$ par rapport à L et K

D'où $\quad \dfrac{\partial Y/\partial L}{\partial Y/\partial K} = \dfrac{w}{r+\delta}$

Cette condition de minimisation des coûts définit k=K/L la technique optimale mais pas le niveau de la production.

Cette condition nous dit quelle technique nous allons choisir mais elle ne nous dit pas combien on va produire. Pour comprendre comment elle raisonne, l'entreprise regarde les prix, elle donne un niveau de production, puis elle choisit la bonne technique. Une fois la production vendue, elle regarde si elle a fait un bénéfice positif (dans ce cas-là, elle produit davantage, les entreprises produisent toutes davantage, la demande de travail et de capital va augmenter, hausse des salaires et du taux d'intérêt, baisse des bénéfices) ou un bénéfice négatif (moins de production, plus de bénéfice etc…).

En effet, rien ne dit que les facteurs sont rémunérés à leur productivité marginale à ce stade. Les entreprises font donc des bénéfices ou des pertes.

La quête de profit conduit les entreprises à ajuster la production jusqu'à l'annulation des bénéfices. Finalement, les facteurs sont rémunérés à la productivité marginale.

Il y a un point d'équilibre où le bénéfice est égal à 0. La concurrence parfaite va faire que l'on va arriver à un niveau de production où on ne fait ni bénéfice, ni perte. Les facteurs seront rémunérés, à cet équilibre, à leur productivité marginale.

- Équilibre du modèle à l'instant "t"

Dans ce modèle, il y a un équilibre instantané. A chaque instant, r et w vont bouger à la vitesse de la lumière pour assurer l'équilibre sur les marchés des deux facteurs. À chaque instant, on a une offre de travail qui est fixe et une demande de travail qui va bouger. Mais si nous ne sommes pas à l'équilibre, le salaire (w) va bouger.

Ce modèle peut être interprété comme un petit modèle d'équilibre général walrasien.

L'équilibre est-il garanti sur le marché des biens ? Oui, d'après la loi de Walras, si l'équilibre est atteint sur deux marchés, il est aussi atteint sur le troisième.

Loi de Walras dans le modèle de Solow:

$$(C + I - Y^S) + w(L^D - L^S) + (r + \partial)(K^D - K^S) = 0$$

2. Équation dynamique fondamentale et équilibre inter-périodique ou croissance régulière

On a vu les contours du modèle, on va étudier l'évolution de l'économie au cours du temps.

Comment évoluent y (revenu/travailleur) et k (capital/travailleur) au cours du temps ?

On va s'appuyer sur une fonction de production intensive : $y = f(k)$.

L'évolution de k va dépendre de l'écart entre deux grandeurs qui sont l'investissement par habitant et "l'investissement de point mort".

$I = \delta Y$
$i = I/L = \delta y$

L'investissement de point mort, à chaque instant, il faut aussi des ressources de quantités de biens afin de maintenir à l'identique le stock de capital par habitant. On souhaite augmenter k mais à chaque instant, ce stock est diminué, il faut mettre de côté pour juste maintenir à l'identique le capital par habitant.

Qu'est-ce qui réduit le stock de capital par habitant ? 1) la dépréciation, à chaque instant, des machines sont cassées; 2) la croissance démographique, on sait que k = K/L, donc lorsque la population (L) augmente, k diminue.

Si l'investissement consenti par les individus (i) est plus petit que l'investissement de point mort (iPM), alors cela implique que k va baisser. Si j'investis moins que ce qui est nécessaire pour maintenir k à l'identique, logiquement, k diminue.

On étudie une économie où il n'y a pas de progrès technique (pas d'innovation).

- Obtention de l'équation dynamique du modèle

C'est une équation qui va décrire l'évolution de k qui nous permettra de représenter le graphique de Solow.

Par définition:

$$\boldsymbol{\dot{K}_t = I_t - \delta K_t = sY_t - \delta K_t}$$

Par ailleurs, $lnk = ln\left(\frac{K}{L}\right) = lnK - lnL$

Ici $\boldsymbol{x = x(t)}$ et on dérive $\boldsymbol{lnx(t)}$ en appliquant la formule de dérivation d'une fonction composée et la formule de la dérivée d'une fonction logarithme.

D'où $\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L}$ ou $g_k = g_K - g_L$ (où $\boldsymbol{\dot{x} = \frac{dx(t)}{dt}}$)

Ainsi $\frac{\dot{k}}{k} = \frac{sY_t - \delta\ \ _t}{K_t} - \frac{\dot{L}}{L}$ où $L_t = L_0 e^{nt} => \frac{\dot{L}}{L} = n$

Ou $\frac{\dot{k}}{k} = \frac{sY_t}{K_t} - \delta - n$

I → investissement brut réalisé par les ménages.
δK → dépréciation.

On a $\dot{k} = \frac{sY_t}{K_t}\frac{K_t}{L_t} - (\delta + n)k$

$$\dot{k} = sy - (\delta + n)k$$

Et $\boxed{\dot{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{sf}(\boldsymbol{k}) - (\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{n})\boldsymbol{k}}$ **Equation dynamique du modèle**

L'équilibre inter-périodique ou **croissance régulière** s'obtient si $\dot{\boldsymbol{k}} = \mathbf{0}$.

On peut distinguer deux termes du côté droit de l'équation:

$\boldsymbol{i} = \boldsymbol{sf}(\boldsymbol{k})$: Investissement par travailleur

$\boldsymbol{i_{pm}} = (\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{n})\boldsymbol{k}$: Investissement de point mort

On est en croissance régulière quand k point égal à 0.

$$gk = \frac{\dot{k}}{k} = \frac{d\ln k}{dt} = \frac{d\ln K}{dt} - \frac{d\ln L}{dt}$$

$$\left(\dot{k} = \frac{dk}{dt}\right) \qquad = \frac{\dot{K}}{K} + \frac{\dot{L}}{L}$$

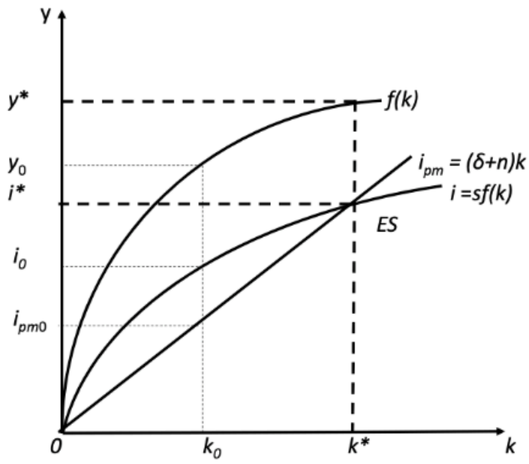
$$\text{or, } \frac{\dot{L}}{L} = n$$

Il faut que l'investissement dépasse la dépréciation.

Cette équation fait dépendre kpoint de la différence entre l'investissement par travailleur et l'investissement de point mort.

S'il y a de la croissance, elle finira toujours par s'arrêter, on sera à l'équilibre inter périodique (ou équilibre stationnaire).

- Analyse graphique de la dynamique



sf(k) > (δ+n)k => dk/dt > 0

sf(k) < (δ+n)k => dk/dt < 0

⇒Convergence vers l'état stationnaire ou sentier de croissance régulier du modèle (équilibre inter-périodique)

⇒dk/dt = 0 ou g_k=0

Croissance nulle à l'équilibre pour le PIB par tête.

L'autre équilibre stationnaire: $k = 0$

Ce deuxième équilibre est instable du fait des conditions d'Inada.

Point d'intersection des deux courbes : pourquoi un point d'intersection ? On a une valeur de k tel que l'investissement de point mort est égal à l'investissement.

On peut analyser l'économie à partir de situations de déséquilibres.
Si le capital/tête est plus élevé que k *; on va avoir une décroissance pour arriver à k *.

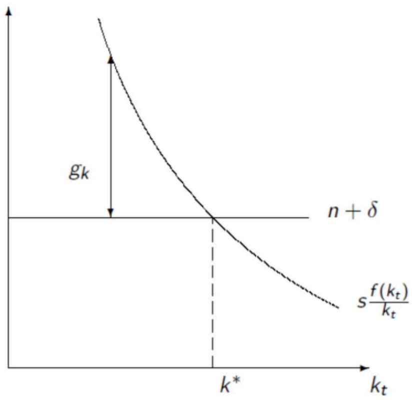


FIG.: Résolution du modèle de Solow (2)

On voit apparaître l'état stationnaire, nécessité de représenter graphiquement la trajectoire de l'économie à partir du logarithme.

L'étude de la dynamique passe aussi par une étude de la trajectoire du revenu par habitant y

Pour cela, on commence par étudier l'évolution du taux de croissance de k donné par l'équation dynamique fondamentale.

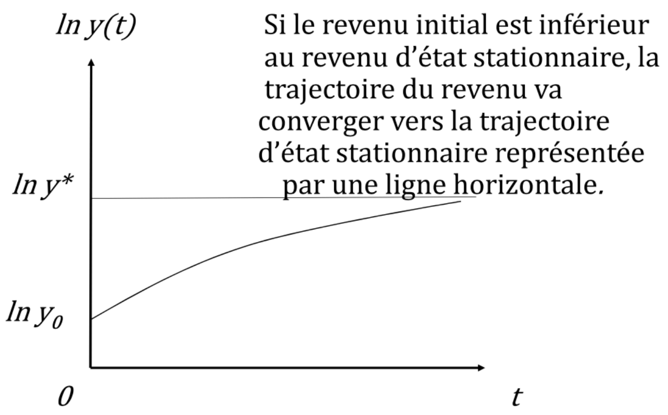
$$g_k = s\frac{f(k)}{k} - (\delta + n)$$

On constate que le taux de croissance de k baisse de façon non linéaire lorsque k converge vers $k\ ^*$.

On note ensuite que :

$$y = k^\alpha \Rightarrow g_y = \alpha g_k$$

gy est nul à l'état stationnaire.



Le mécanisme économique à l'oeuvre dans le processus de convergence (en termes économiques), à apprendre et à comprendre :

Soit $k_0 < k^*$

L'investissement des ménages est tel que l'accumulation du capital est plus rapide que la croissance de la population. Le capital par habitant, les moyens de production donc chaque travailleur dispose, augmente. Ceci entraîne une augmentation de la production de chaque travailleur. Comme la production, et donc le revenu, des individus augmente, l'épargne individuelle (et agrégée) augmente. Ceci veut dire que le stock de capital par travailleur augmente.

Ce processus se poursuit tant que l'investissement de chaque travailleur dépasse la perte de capital liée à la dépréciation (usure des outils lorsqu'on les utilise) et à la croissance de la population (nécessité d'équiper les nouveaux arrivants sur le marché du travail ou dilution du capital).

Mais du fait de la productivité marginale décroissante du capital (par travailleur), les accroissements successifs du capital par travailleur (k) augmentent de moins en moins la production et le revenu (y) des travailleurs. En conséquence, l'investissement augmente de moins en moins. L'investissement de point mort par contre est en proportion constante du capital par tête. Il augmente aussi vite que k. La productivité marginale décroissante des facteurs conduit ainsi à l'état stationnaire c'est-à-dire au point où l'investissement tombée au niveau de l'investissement de point mort et suffit juste à préserver le niveau du capital par travailleur.

3. **Solution mathématique (1)**

- Quelles sont les valeurs de k, y et c à l'état stationnaire ?

L'état stationnaire suppose que $\dot{k} = 0$ donc:

$$sf(k^*) = (\delta + n)k^*$$

Exemple: $\boldsymbol{y = k^{\alpha}}$

$$sk^{\alpha} = (\delta + n)k^*$$

$$k^{*\alpha - 1} = \frac{\delta + n}{s}$$

$$\boldsymbol{k^* = \left(\frac{s}{\delta + n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \Rightarrow y^* = \left(\frac{s}{\delta + n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \Rightarrow c^* = (1 - s)\left(\frac{s}{\delta + n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}$$

$$sk^{\alpha} = (n + \delta)k$$

$$\frac{sk^{\alpha}}{sk} = \frac{(n+\delta)k}{sk} \Leftrightarrow \frac{k^{\alpha}}{k} = \frac{n+\delta}{s}$$

$$\frac{k^n}{k} = k^n \times k^{-1} \Rightarrow k^{n-1}.$$

$$\Rightarrow k^{\alpha - 1} = \frac{n+\delta}{s}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k^{1-\alpha}} = \frac{n+\delta}{s}$$

$$\Rightarrow (k^{1-\alpha})^{1/1-\alpha} = \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{1/1-\alpha}$$

$$(k^a)^b = k^{a \times b}$$

4. Dynamique des variables de répartition

On va se poser la question de l'évolution au cours du temps des variables r et w.
Une fois que l'on est à l'état stationnaire, il n'y a plus de croissance, k ne varie pas donc il n'y a pas de changement de r ou de w.

$$f'(k) = r + \delta$$
$$f(k) - kf'(k) = w$$

Le salaire réel d'équilibre w* est constant le long du sentier de croissance équilibré et non pas croissant comme le suggèrent les observations empiriques.

Le salaire réel, le taux d'intérêt réel et la répartition varient au cours de la transition :

$$\dot{w} = -kf''(k)\dot{k}$$

du signe de $\dot{k}$ ($f'' < 0$)

$$\dot{r} = f''(k)\dot{k}$$

du signe opposé

Quand le capital par tête est trop faible ($k > k$ *),

$$\dot{k} > 0,\ \dot{w} > 0 \text{ et } \dot{r} < 0$$

jusqu'à ce que la technique de production soit devenue suffisamment capitalistique.

À long terme, dans ce modèle de Solow il n'y a pas de variation dans la rentabilité du capital et dans la rémunération du travail.

L'autre fait stylisé que l'on peut remarquer est qu'à long terme, le salaire réel augmente.

Lorsqu'on n'est pas à l'État stationnaire, les prix des facteurs vont varier. Comment ? On regarde leur taux de variation.
Ces dérivés montrent que :

$k_0 < k^*$

$$\nearrow k \Longrightarrow \left.\begin{cases} \uparrow w \\ \downarrow r \end{cases}\right) \text{en transition}$$

À l'équilibre stationnaire,
$w = r =$ constante !

Pourquoi w augmente quand k augmente ? Car il y a une abondance plus accrue du capital relativement au travail, la productivité marginale du capital a tendance à relativement baisser.

Dans le modèle de Solow en transition vers l'état stationnaire, l'investissement modifie le capital par tête disponible. Le plein emploi est alors possible grâce à deux hypothèses :

1) Le fait que les techniques disponibles soient infinies : il y a toujours une technique qui permet d'utiliser en combinaison tout le capital et tout le travail.
2) L'ajustement instantané du loyer du capital et du salaire réel. Si k est trop petit, il va augmenter, ceci pousse à la baisse le loyer du capital et à la hausse le salaire réel. Ceci incite les entreprises à utiliser des techniques de plus en plus capitalistiques (plus de capital et relativement moins de travail).

5. <u>**Les leçons du modèle de Solow**</u>

On va tirer quelques leçons du modèle de Solow.

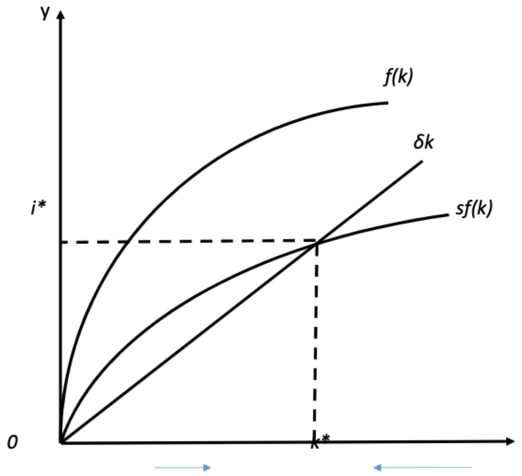
Quelles sont ses propriétés ? Quelles sont les origines de la croissance économique ? Les inégalités, plus précisément les écarts de revenus entre pays ? La politique économique ?

- Les conséquences de l'accumulation du capital

Il y a une interrogation sur l'accumulation du capital dans le modèle de Solow.
On va supposer une économie « à la Solow » où la population ne change pas (pas de croissance démographique, $n = 0$), il n'y a pas de progrès technique, la seule chose qui peut changer est le stock de capital.

Que peut-on expliquer dans une économie de ce type ?
Peut-on expliquer la persistance de la croissance économique sur la base de l'accumulation du capital ? Pour représenter cette économie, sans croissance de population, on a simplifié le modèle.

Une telle économie est représentée par un schéma de Solow standard.



Comme nous l'avons vu précédemment, une croissance du revenu par travailleur est possible mais elle bute sur l'état stationnaire.

La croissance ne dure pas au-delà de la transition vers l'état stationnaire. Ce modèle de Solow ne peut pas expliquer un des faits de Kaldor ou le caractère stable et positif du taux de croissance à long terme du revenu par habitant.

C'est à la fois une limite du modèle et une leçon du modèle : l'accumulation du capital ne suffit pas à expliquer la croissance économique.

L'équation dynamique a été simplifiée. L'investissement de point mort est juste : δk.

À long terme, on arrive à l'état stationnaire, on n'a aucune croissance, plus rien ne change en économie.

Le modèle de Solow nous montre qu'avec les hypothèses néoclassiques, l'accumulation du capital ne peut pas expliquer la croissance économique.

Sous cette forme-là, il n'explique pas la persistance de la croissance économique à long terme ; mais on peut expliquer la croissance transitoire.

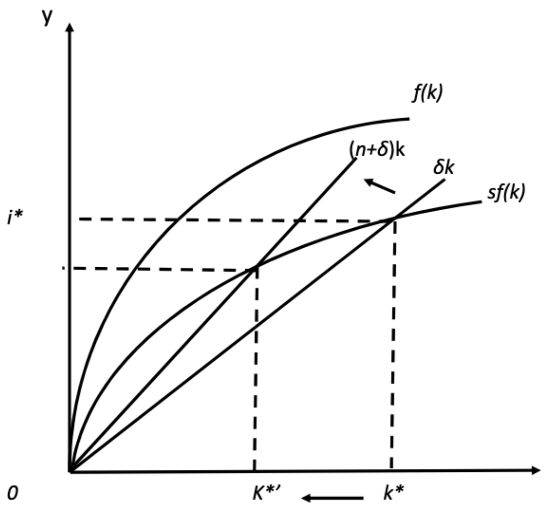
« tigres asiatiques » : Exemple de Taiwan, un économiste a montré que dans certains de ses pays, l'essentiel de la croissance venait de l'épargne, pas de progrès technique, au fond, la prédiction de l'économie était que cette croissance allait finir par s'arrêter sauf si on trouve d'autres moteurs de la croissance.

- Les conséquences de la croissance démographique

Si on réintroduit la croissance démographique, ça change quelque chose ? On va partir de la situation précédente (aucune croissance démographique) et avec notre schéma de Solow, on part de $n = 0$et on suppose que n devient $n > 0$.

Peut-on expliquer la croissance à long terme si on réintroduit la croissance démographique dans le modèle ?

Ce taux de croissance démographique positif conditionne la pente de la courbe d'investissement de point mort, elle va pivoter par rapport à l'origine, plus précisément, la droite d'investissement de point mort va pivoter vers le haut (sa pente augmente).



Le passage de $n = 0$ à $n > 0$ peut-être décomposé en trois temps à partir de notre graphique.

- **Effet instantané** du choc. Lorsque la modification se produit, un écart se creuse entre l'investissement et l'investissement de point mort. Le taux de croissance du capital par tête devient négatif.
- **Effet en transition**. Le capital par tête baisse. La population augmente plus vite que le stock de capital.
- **Effet à long terme**. Le capital par tête à long terme atteint une nouvelle valeur d'état stationnaire plus faible. Le revenu par habitant à chuté.

On peut apprécier l'effet sur les variables d'état stationnaire à partir des formules vues plus haut :

$$\boldsymbol{k}^* = \left(\frac{s}{\delta+n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$\boldsymbol{y}^* = \left(\frac{\boldsymbol{s}}{\boldsymbol{\delta}+\boldsymbol{n}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\boldsymbol{c}^* = (\mathbf{1}-\boldsymbol{s})\left(\frac{\boldsymbol{s}}{\boldsymbol{\delta}+\boldsymbol{n}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

On peut étudier l'effet sur le taux de croissance du capital par tête et la trajectoire du revenu par tête… (tracer le graph)

NB/ Dans les exercices, il faut décomposer de cette façon-là.

À long terme, on revient à l'État stationnaire.

- Une nouveauté à l'État stationnaire

$$k = \frac{K}{L} \Longrightarrow \ln(k) = \ln\left(\frac{K}{L}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \ln(k) = \ln(K) - \ln(L)$$

$$\Longleftrightarrow \overbrace{g_{k^*}}^{=0} = g_K - g_L$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{g_K = g_L = n}$$

$$y = \frac{Y}{L} \Rightarrow g_y = g_Y - g_L \Rightarrow g_Y = g_L + g_y$$

D'où $\boldsymbol{g_Y = g_K = g_L = n}$

On peut aussi s'appuyer sur la fonction de production et l'hypothèse de rendements d'échelle constants.

Interprétation :

Un accroissement du taux de croissance démographique a un effet négatif sur le revenu par habitant à l'état stationnaire.

Une croissance démographique positive ne réduit pas continûment le revenu par habitant une fois l'état stationnaire atteint. Explications → les nouveaux individus épargnent et génèrent leur propre stock de capital.

⇒ Investissement : fraction pour compenser l'amortissement et fraction pour doter les nouveaux nés. S'il y a plus de nouveaux nés, l'investissement net s'annule plus vite au cours de la croissance transitionnelle.
À l'État stationnaire, k ne bouge pas mais il y a une forme de croissance car la population augmente donc le stock d'outils total va augmenter. Lors d'une situation d'État stationnaire, on investit pour fournir à chaque individu qui rentre dans la société, des outils.

La production va augmenter au même rythme que le stock de capital et donc que le nombre de travailleurs.

Il y a une croissance continue de la production agrégée qui est la conséquence de la croissance démographique.

Le modèle de Solow nous dit que si la croissance démographique s'accélère c'est mauvais car cela fait baisser la part de gâteau de chacun à long terme (état stationnaire). Il y a une forme de malthusianisme dans le modèle de Solow qui dit qu'une accélération de la hausse de la croissance démographique est mauvaise.

On n'est pas tout à fait chez Malthus car au fond, ce n'est pas très grave que la population augmente tout le temps. Chez Malthus, on s'enfonce dans la misère avec une population qui augmente tout le temps; l'économie est prisonnière d'un facteur fixe et la population ne peut pas augmenter sans réduire la part de gâteau de chacun. À long terme, on revient toujours à la même population. Chez Solow, ce n'est pas ça, il n'y a pas de pessimisme de ce genre car une fois que l'on est arrivés à l'état stationnaire, si la population augmente, on épargne, on investit et on reste dans une situation équilibrée. On peut avoir une population qui augmente sans fin, ça ne va pas être dramatique, on va juste produire plus pour que tout le monde se nourrisse de la même façon.

Dans le raisonnement de Malthus, on produit avec un facteur fixe, la quantité de terres est fixe, on a donc un gâteau fixe que l'on doit partager, la part diminue au fur et à mesure que la population augmente. Les deux facteurs de production chez Solow peuvent varier, la terre peut être élargie.

- Les effets d'un accroissement du taux d'épargne et la règle d'or

La croissance démographique peut expliquer la croissance mais en un sens limité. Pourquoi le niveau de vie augmente ? La croissance démographique ne permet pas d'expliquer le niveau de vie en hausse.

Que se passe-t-il si les travailleurs de l'économie décident d'accroître leur taux d'épargne qui passe de $s0$ à $s1$? Quel est l'effet sur la croissance à l'impact, en transition et à long terme et l'effet sur le niveau de consommation des individus qui peuplent l'économie ?
On va se demander quels sont les effets sur k et y mais aussi sur la consommation, si j'épargne plus, est-ce que je suis plus riche ? Est-ce que je peux consommer davantage ?

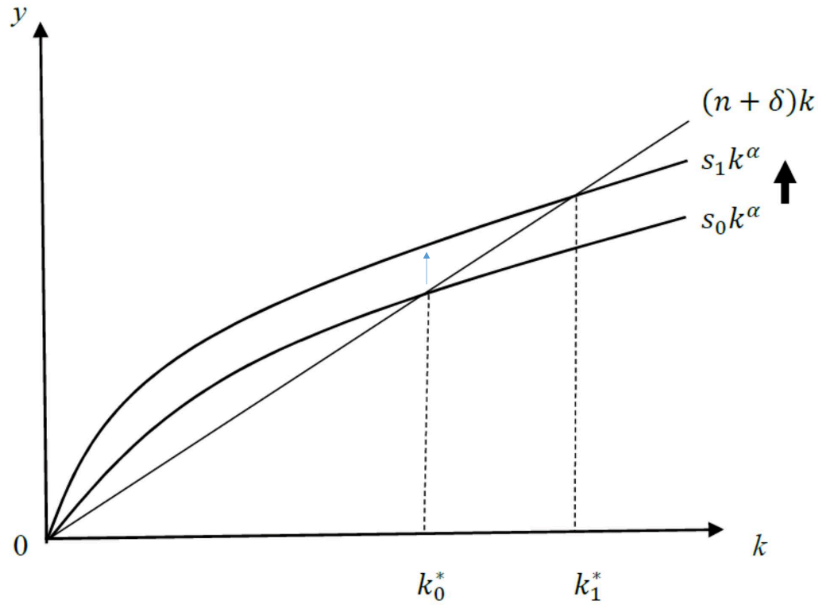
Effets à long terme :

On a $\boldsymbol{k}^* = \left(\frac{\boldsymbol{s}}{\boldsymbol{\delta+n}}\right)^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1-\alpha}}} \Rightarrow \boldsymbol{y}^* = \left(\frac{\boldsymbol{s}}{\boldsymbol{\delta+n}}\right)^{\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{1-\alpha}}} \Rightarrow \boldsymbol{c}^* = (\mathbf{1}-\boldsymbol{s})\left(\frac{\boldsymbol{s}}{\boldsymbol{\delta+n}}\right)^{\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{1-\alpha}}}$

On constate que si s augmente alors k * et y * augmentent alors que l'effet sur c * est ambigu.

L'augmentation du taux d'épargne a des effets contradictoires sur la consommation.

Les mécanismes à l'œuvre peuvent être décomposés à l'aide du schéma de Solow.



On peut regarder les conséquences, à l'impact, en transition à long terme.

Impact → On voit apparaître (flèche bleu) un écart qui se crée à l'impact entre l'investissement et l'investissement de point mort, à l'impact, le stock de capital/tête ne va pas changer. De même, la production par tête ne varie pas. Mais, leur taux de croissance passe de 0 à un montant positif car l'investissement s'élève au-dessus de l'investissement de point mort de l'économie.

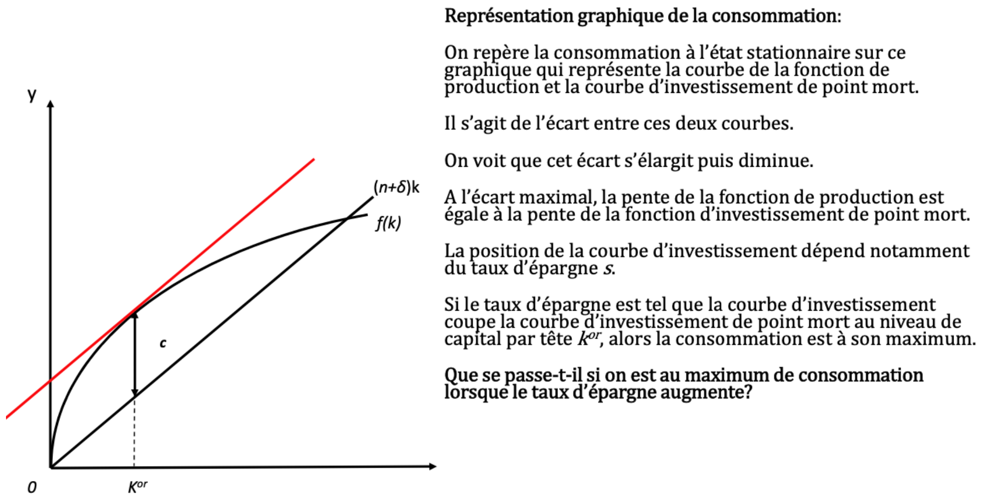
Transition → Phase de dynamique transitoire, le capital va augmenter mais la productivité marginale étant décroissante, à mesure que la production augmente, l'investissement augmente de moins en moins vite et finit par atteindre l'investissement de point mort.
De même, la production par tête augmente mais de moins en moins vite.
Long terme → l'économie rejoint un nouvel état stationnaire pour un niveau plus élevé de k et y mais l'effet sur c est ambigu. Le taux de croissance à long terme reste nul ! L'effet sur la croissance est transitoire.

Sur le plan économique, accroître le taux d'épargne permet de produire plus et de disposer d'un revenu plus important, ceci accroît la consommation, mais en même temps, un taux d'épargne plus élevé veut dire qu'il reste moins de revenu disponible pour la consommation. On devine l'existence d'un taux d'épargne qui maximise la consommation.

Cet exemple montre qu'une augmentation du taux d'épargne crée de la croissance économique mais celle-ci est transitoire.

Si les Français se mettaient tous à épargner davantage, cela accélérerait la croissance mais avec un effet transitoire.

L'effet d'une variation du taux d'épargne sur la consommation peut être analysé graphiquement :



Dans la zone entre 0 et l'intersection avec la fonction de production, le taux d'épargne va déterminer où je vais me trouver. Avec un taux d'épargne plus petit, intersection à un point inférieur et inversement. A mesure que mon taux d'épargne varie, le point d'intersection glisse sur le courbe d'investissement de point mort.

Il existe un certain moment à partir duquel si on épargne plus, l'écart va se refermer donc on consomme moins (seuil).

Le point de consommation maximum est déterminé par le point où : pente de la fonction de production = pente de la fonction d'investissement de point mort.

On peut déterminer mathématiquement les conditions qui définissent la valeur de k * telle que la consommation soit maximale.

On s'intéresse à la consommation sur le sentier régulier, on sait que : Consommation = production – épargne

$$c^* = (1-s)y^* = \mathrm{f}(k^*) - s\mathrm{f}(k^*)$$
$$c^* = \mathrm{f}(k^*) - (n+\delta)k^* car\ \dot{k} = 0$$

Dans ce système-là, on tient compte du fait qu'on est à l'État stationnaire.

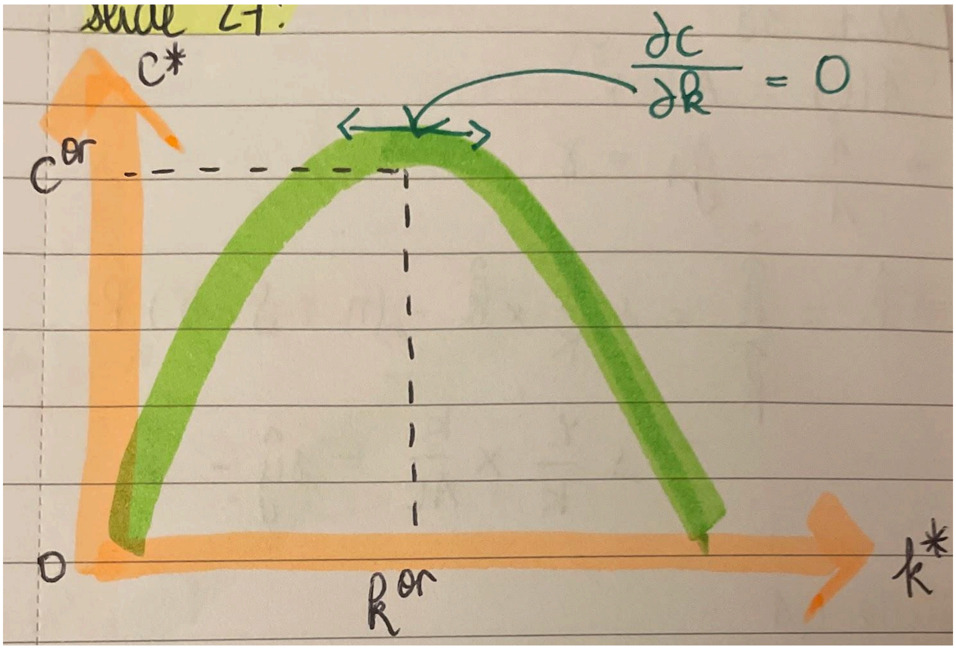
On cherche pour quelle valeur de k^*, c^* est à son maximum :

$$\frac{dc\ (k)}{dk} = f'(k) - (n+\delta) = 0$$

c^* maximum si : $f'(k^*) = n + \delta$ ou $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{n}$ $\quad (car\ f'(k^*) = r + \delta)$

Le taux d'intérêt net de l'économie doit être égal au taux de croissance démographique. Cette relation est appelée “règle d'or” (Maurice Allais et Edmund Phelps).

⇒ Ce résultat permet de déterminer la valeur de k^* qui maximise la consommation. Comme le suggère l'analyse graphique, on constate qu'il s'agit bien du point de tangence à la courbe de la fonction de production et de la droite d'investissement de point mort.



Connaissant le capital par tête à l'état stationnaire en fonction des paramètres du modèle, il est possible d'en déduire le taux d'épargne qui maximise la consommation. Avec une fonction Cobb-Douglas standard, on peut montrer que $s = \alpha$.

Cette analyse pointe un levier d'action politique. Si la finalité de la croissance est la consommation, le gouvernement devrait chercher à obtenir le taux d'épargne qui maximise la consommation.

D'un autre côté, s'il est possible de générer de la croissance en incitant les ménages à épargner plus, ceci peut aussi avoir un effet pervers sur la consommation (si $s > \alpha$).

Et il ne faut pas perdre de vue la durée de l'ajustement, qui peut être très longue.

C'est une différence avec le modèle walrassien. Le modèle de Solow insiste sur le fait que l'équilibre dynamique n'est pas forcément la meilleure situation possible, pas forcément l'optimum au sens de Pareto alors que l'équilibre général walrassien est un optimum de Pareto.

Les travailleurs ne cherchent pas à maximiser leur utilité, l'équilibre ne maximise pas l'utilité.

6. <u>**Solution mathématique du modèle (2)**</u>

On peut chercher à déterminer $k(t)$ solution de l'équation dynamique (fondamentale) du modèle dans le cas de la fonction de production Cobb-Douglas en fonction des paramètres (les données) du modèle.

On pose : $v = K/Y$ (coefficient de capital) et on change de variable :

$$v = \frac{k}{y} = k^{1-\alpha}$$

$$\dot{v} = (1-\alpha)k^{-\alpha}\dot{k}$$

$$\dot{v} = (1-\alpha)k^{-\alpha}[sk^{\alpha} - (\partial + n)k\,] \text{ car } \dot{k} = sk^{\alpha} - (\delta + n)k$$

$$\dot{v} + (1-\alpha)(\delta + n)v = (1+\alpha)s$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre. On cherche *v(t)* en fonction de α, δ, n et s.

La **résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1** se présente comme suit :

Soit $a\dot{x}_t + bx_t = c$

- On cherche la solution particulière stationnaire en posant $\dot{x}_t = 0$. Si b est différent de zéro on a $\bar{x} = \frac{c}{b}$.
- On cherche ensuite la solution de l'équation homogène $a\dot{x}_t + bx_t = 0$. Il s'agit de $x_t = Ae^{-\frac{b}{a}t}$. (Vérifiez le en dérivant cette expression par t)
- La solution de l'équation initiale est la somme de la solution particulière et de la solution de l'équation homogène:

$$x_t = \bar{x} + Ae^{-\frac{b}{a}t}$$

On obtient la valeur de A en posant t = 0 => $A = x_0 - \bar{x}$

Application à l'équation dynamique du modèle d Solow :

$$\dot{v} + (1-\alpha)(n+\delta)v = (1+\alpha)s$$

On a ici $\bar{v} = v^* = \frac{s}{\delta+n}$ et par conséquent:

$$\boldsymbol{v_t = v^* + (v_0 - v^*)e^{-(1-\alpha)(n+\delta)t}}$$

Comme $-(1-\alpha)(n+\delta) < 0$ on constate que v(t) converge bien vers sa valeur stationnaire.

Vitesse de convergence si $\alpha = \frac{1}{3}$ et $n + \delta = 0{,}03$. On cherche le temps pour parcourir la moitié du chemin vers l'état stationnaire.

Soit $v_t - v^* = (v_0 - v^*)0{,}5$ on a donc $e^{-0{,}02t} = 0{,}5$ ou $t = -\frac{ln 0{,}5}{0{,}02} \simeq$ 34,65. Vous pouvez montrer qu'il faut 80 ans pour faire 80% du chemin.

On veut obtenir l'équation dynamique pour $k(t)$ en substituant :

$v = k^{1-\alpha}$ dans la solution $v(t)$.

On obtient :

$$k(t) = \left(v^* + (v_0 - v^*)e^{-(1-\alpha)(n+\delta)t}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

On peut voir que $k(t)$ tend vers sa valeur stationnaire quand t tend vers l'infini. On retrouve le résultat précédent.

Chapitre 2 : L’introduction du progrès technique

- Le progrès technique dans le modèle de Solow

Soit la fonction de production :

$$Y = F(K, AL) \text{où } A(t) = e^{\gamma t}$$

L’accroissement de A au cours du temps permet de produire plus avec des ressources identiques.
Le progrès technique porte sur l’efficacité du travail.
On distingue :

- $L \rightarrow$ travail effectif
- $A \rightarrow$ efficacité du travail
- $AL = E \rightarrow$ travail efficace ou nombre d’unités de travail efficaces

Le terme A étant l’objet d’une croissance continue. C’est le rythme du progrès technique, A est l’efficacité du travail.

On a les mêmes ressources matérielles, le même nombre de machines et de travailleurs mais le progrès technique va nous permettre de produire davantage. Si A augmente, c’est comme si on avait plus de travailleurs.

Pourquoi introduit-on le progrès technique comme un facteur qui multiplie le nombre de travailleurs ?

- Progrès technique neutre au sens de Harrod

Le progrès technique pourrait être introduit de plusieurs façons dans la fonction de production.

$Y = AF(K, L) \rightarrow$ progrès neutre au sens de Hicks (les productivités marginales du capital et du travail ne changent pas l’une relativement à l'autre si A change).

$Y = F(AK, L) \rightarrow$ progrès neutre au sens de Solow.

$Y = F(K, AL) \rightarrow$ progrès neutre au sens de Harrod.

$Y = A_Y F(A_K K, A_L L) \rightarrow$ formulation plus générale.

Il a été démontré que seul un progrès neutre au sens de Harrod permettait d'obtenir les caractéristiques de la croissance observées par Kaldor (croissance équilibrée avec constance du ratio Y/K, constance des parts de capital et de travail dans le PIB, r constant).

Acemoglu (2009) : "This result is very surprising and troubling, since there are no compelling reasons for why technological progress should take this form".

Remarque : Avec une fonction Cobb-Douglas, on peut transformer les progrès techniques neutres au sens de Hicks et Solow en progrès technique neutre au sens de Harrod. Les formulations sont équivalentes.

- Exemple de la fonction Cobb-douglas

$$Y = K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha}$$

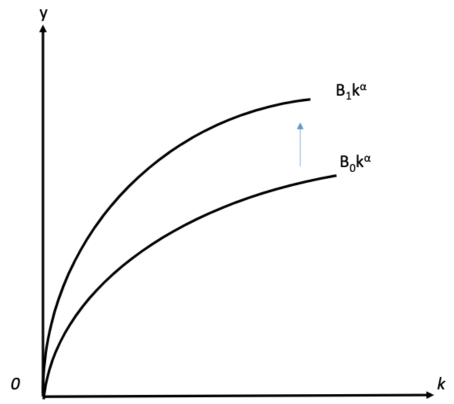
On peut aussi écrire :

$$Y = BK^{\alpha}L^{1-\alpha} \quad \text{où} \quad B = A^{1-\alpha}$$

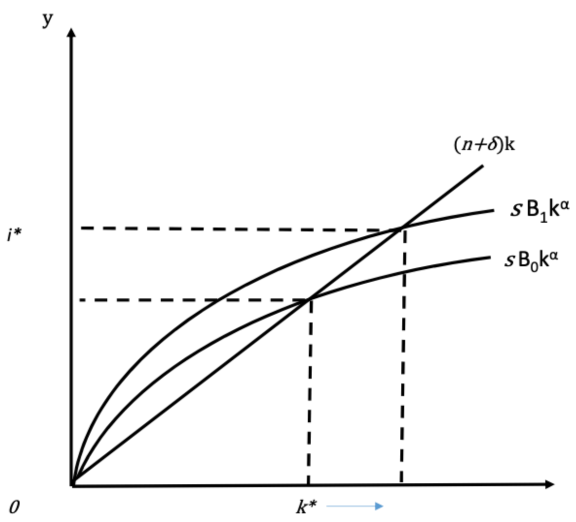
Ou encore :

$$y = Bk^{\alpha}$$

B sera appelée "productivité totale des facteurs".



On a ici l'effet d'un accroissement ponctuel de la productivité totale des facteurs (progrès technique ou accroissement de A).



On a ici l'effet du progrès technique sur l'état stationnaire dans le modèle de Solow.
Le progrès technique permet d'augmenter le capital à long terme
Une innovation technologique ponctuelle génère une croissance transitoire, elle a le même effet qu'une hausse du taux d'épargne.

- L'analyse de la croissance régulière dans le modèle avec progrès technique

Le raisonnement en grandeurs par unité de travail efficace

On définit: $\hat{y} = \frac{Y}{AL}$ et $\hat{k} = \frac{K}{AL}$

Ainsi $Y = F(K, AL)$ devient $\hat{y} = f(\hat{k})$ en divisant la fonction de production des deux côtés par *AL*

On a toujours $\dot{K}_t = I_t - \delta K_t = sY_t - \delta K_t$

$$Y = F(K, AL)$$

$$\frac{Y}{AL} = F\left(K \times \frac{1}{AL}, AL \times \frac{1}{AL}\right)$$

$$\hat{y} = F(\hat{k}, 1) = f(\hat{k}).$$

Comment l'équation dynamique est-elle modifiée par l'introduction du progrès technique ?

On a $\quad ln\hat{k} = \ln\left(\frac{K}{AL}\right) = lnK - lnL - lnA$

D'où $\quad \frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L} - \frac{\dot{A}}{A}$ ou $\quad g_{\hat{k}} = g_K - g_L - g_A$

Ainsi $\quad \frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} = \frac{sY_t - \delta K_t}{K_t} - n - \gamma$

Et $\quad \dot{\hat{k}} = sf(\hat{k}) - (n + \gamma + \delta)\hat{k}$

$$A(t) = A(0)^{\gamma t}$$

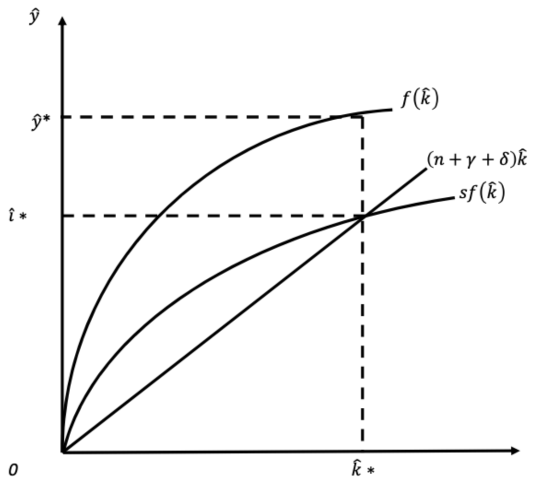
$$\Rightarrow \frac{\dot{A}}{A} = g_A = \gamma$$

$$\Rightarrow \dot{\hat{k}} = \frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} = s\frac{Y}{K} \times \hat{k} - (n + \delta + \gamma)\hat{k}$$

$$\Rightarrow s\frac{Y}{K} \times \frac{K}{AL} = s\hat{y} - \hat{k}$$

La forme générale de l'équation dynamique fondamentale reste inchangée.

- Analyse graphique de la dynamique



L'analyse reste inchangée sur la forme.
L'économie tend vers un capital et un revenu par unité de travail efficace d'état stationnaire.

Sur le sentier régulier :

$$g_{\hat{k}} = 0$$

Quelle est la dynamique du revenu par habitant à l'état stationnaire ?
On converge toujours vers le sentier régulier.

- Vers une explication de la croissance durable du revenu par habitant

Sur le sentier régulier de croissance :

$$g_{\hat{k}} = 0 \Rightarrow g_k - g_A = 0 \Rightarrow g_k = g_A = \gamma$$

Nous savons que

$$y = A^{1-\alpha} k^{\alpha}$$

D'où

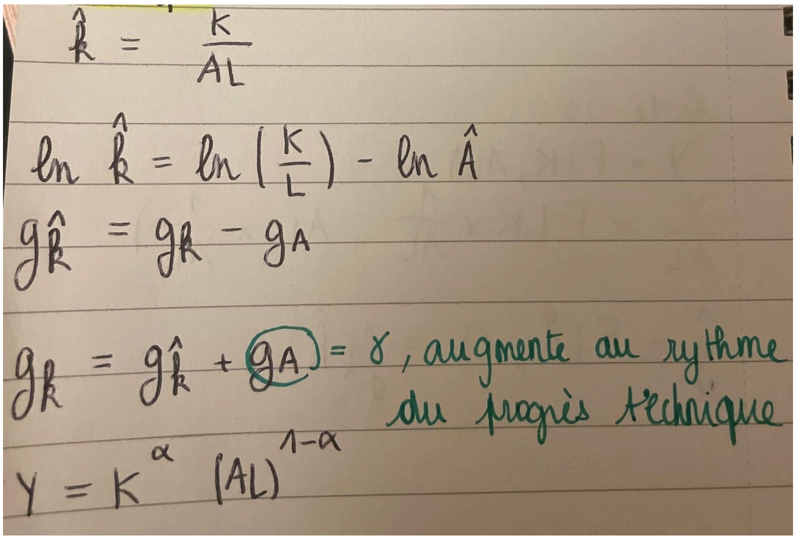
$$g_y = (1-\alpha) g_A + \alpha g_k$$

Donc

$$\boldsymbol{g_y = \gamma > 0}$$

On peut aussi montrer que:

$$\boldsymbol{g_K = n + \gamma \text{ car } g_k = g_K - g_L}$$
$$\boldsymbol{g_Y = n + \gamma \text{ car } g_y = g_Y - g_L}$$



Le revenu/travailleur va progresser au taux du progrès technique.
S'il n'y a pas de progrès technique, il n'y a pas de croissance durable.

Conclusion → Le progrès technique est le moteur de la croissance.

- Valeur des variables clés sur le sentier régulier

En posant $\dot{\hat{k}} = 0$ on a $sf(\hat{k}) = (n + \gamma + \delta)\hat{k}$

En résolvant cette équation pour la Cobb-Douglas, on obtient :

$$\hat{k}^* = \left(\frac{s}{\delta + n + \gamma}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \Rightarrow \hat{y}^* = \left(\frac{s}{\delta + n + \gamma}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\Rightarrow y^* = A\left(\frac{s}{\delta + n + \gamma}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\Rightarrow c^* = (1 - s)A\left(\frac{s}{\delta + n + \gamma}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Il est utile de se représenter les grandeurs à l'état régulier.
On se situe à l'état régulier. Dans cette situation, l'investissement est égal à l'investissement de point mort.

Comme on est dans une forme d'état stationnaire, y chapeau est constant.
A augmente toujours au cours du temps, c'est parce que A augmente sans cesse que y * augmente tout le temps. On suppose que l'efficacité du travail augmente toujours au cours du temps, c'est grâce à ça que y * augmente.

La consommation dépend aussi de A .

Le niveau de vie des habitants augmente sans fin dans ce modèle. On a un modèle qui propose une explication de ce qu'on observe dans les économies depuis 200 ans (depuis la Révolution industrielle).

- Représentation graphique de la trajectoire du revenu au cours du temps (en logarithme)

Le sentier régulier traduit la croissance au taux constant gA du revenu y. Comme la dérivée de lny est égal au taux de croissance de y, positif, le sentier prend la forme d'une droite croissante.

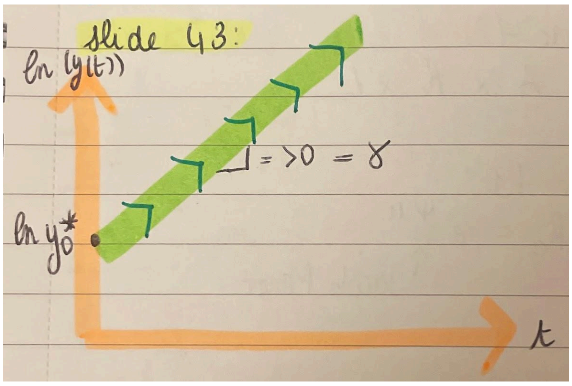
L'ordonnée à l'origine de cette droite est le revenu d'état régulier y* correspondant à la valeur initiale de A qu'on notera y*0.

Si le revenu au temps $t = 0$ est inférieur à y*0, il va suivre une trajectoire qui converge vers le sentier régulier. On peut montrer que la pente de cette trajectoire est initialement supérieur à gA puisqu'elle décroît progressivement (de façon non linéaire) pour tendre vers gA à l'infini. Pour cela, il faut définir le taux de croissance de y en transition.

Pourquoi utiliser le logarithme ?

On veut se représenter l'évolution du revenu/habitant au cours du temps. Ça va être un schéma qui va être utile pour réfléchir à cette économie quand quelque chose change.

Voir slide 43



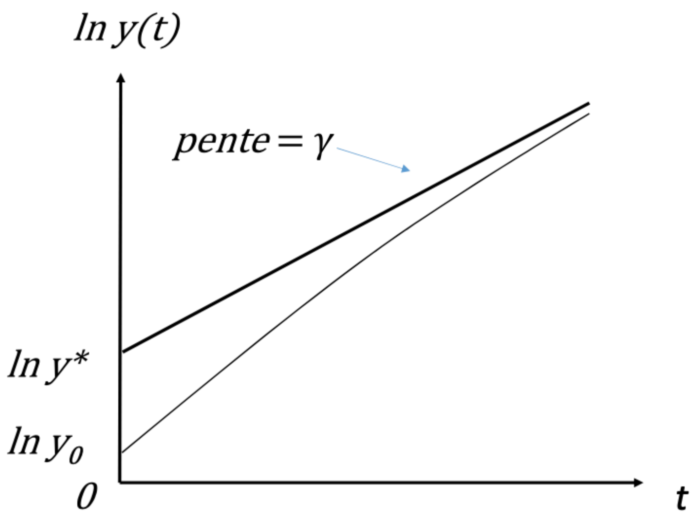
• On a

$$\hat{y} = f(\hat{k}) \Rightarrow y = Af(\hat{k}) \Rightarrow g_y = g_A + g_{f(\hat{k})}$$

Mais $g_{f(\hat{k})} = \frac{\frac{df(\hat{k})}{dt}}{f(\hat{k})} = \frac{f'(\hat{k})}{f(\hat{k})}\dot{\hat{k}}$

Ou $g_y = g_A + \frac{f'(\hat{k})}{f(\hat{k})}\dot{\hat{k}}$

En deçà du sentier régulier, nous savons que $\dot{\hat{k}} > 0$ de sorte que $g_y > g_A$. Par ailleurs, à mesure que $\hat{k}$ se rapproche de sa valeur d'état régulier, $\frac{f'(\hat{k})}{f(\hat{k})}\dot{\hat{k}}$ diminue et tend vers zéro. Ceci explique la forme concave de la trajectoire du revenu à partir de y_0 sur le graphique suivant:

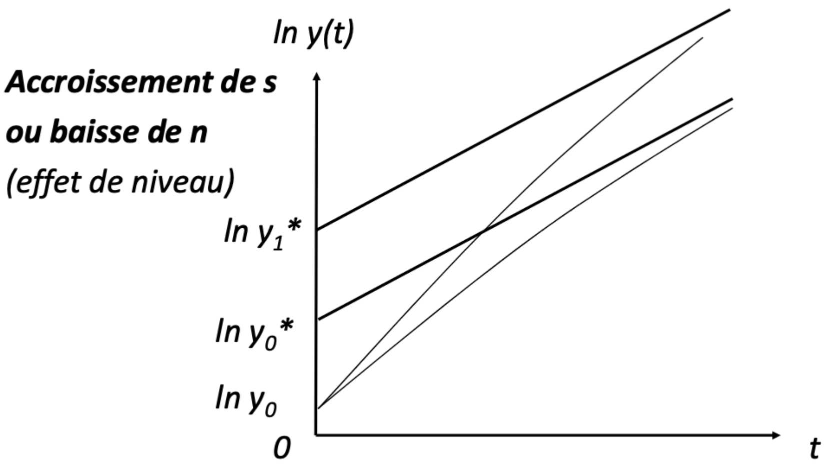


$\boxed{g_y = g_A}$ → à l'état régulier

$\boxed{g_y = g_A + g_{f(k)}}$ → toujours vrai

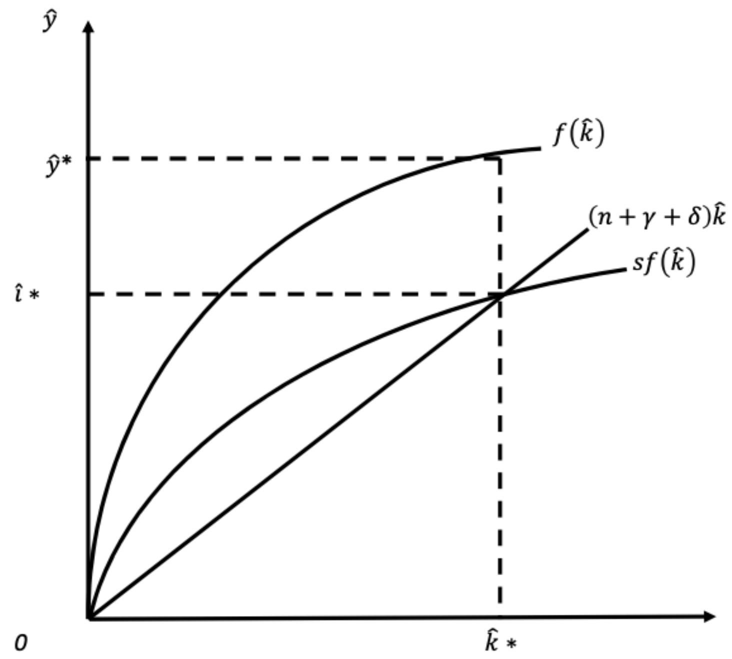
Formellement, on part de la fonction de production de notre économie en forme intensive. Le taux de croissance du revenu est le rythme du progrès technique + le taux de croissance de f(k chapeau).

Pour arriver à tirer des conclusions générales, on cherche à expliquer le taux de croissance de f(k chapeau)



Cela prend appui sur ce que nous dit le modèle de Solow.

Le problème : on suppose qu'on est en dessous de l'état régulier, sur le schéma ci-dessous, on est aussi en dessous de l'état régulier :



k chapeau point est positif,
Le schéma de solow nous dit que l'on va converger vers l'état régulier, l'écart entre les courbes d'investissement et d'investissement de point mort se réduit.

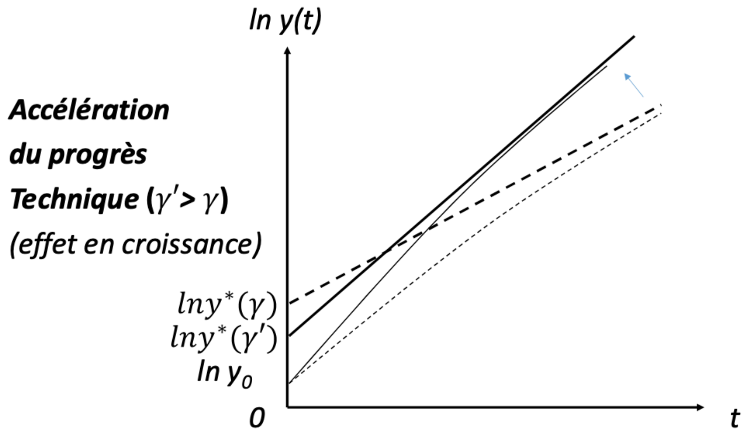
Une économie qui n'est pas sur son sentier régulier va finir par le rejoindre.

On va soumettre l'économie à des chocs, et on va faire de la statique comparative.
L'enjeu est de comprendre les enjeux sur la croissance de tel ou tel phénomène.

Que se passe-t-il si le stock de capital augmente ou est détruit ? (tout est ravagé pendant une guerre).

Désormais, il y a deux grandes étapes dans l'analyse : la première est de regarder ce qu'il se passe sur le schéma de Solow, si l'état régulier change ou non, on peut avoir des chocs qui nous écartent de l'état régulier.

La plupart du temps, les chocs vont modifier l'état régulier, on peut le repérer sur le schéma de Solow. Mais on veut in fine voir l'effet sur le revenu/habitant, on trace le schéma de la trajectoire du revenu à long terme. On va d'abord regarder l'effet du choc sur le sentier régulier de croissance. Puis, on se demande ce qu'il se passe en transition; si le choc m'écarte du sentier régulier de croissance. Et si je m'en écarte, comment j'y reviens ?



La première chose à regarder est de voir si on change le taux d'épargne.
À l'impact, la valeur du capital/tête par unité de travail efficace, ne dépend pas de l'épargne.
On a l'écart qui se creuse entre l'investissement et l'investissement de point mort.

Il y a deux choses qui définissent mon sentier régulier de croissance :

- sa pente, ɣ

Quand j'augmente le taux d'épargne, la pente ne change pas dans le monde de Solow.
La pente reste inchangée.

- ordonnée à l'origine, $y * 0$

L'ordonnée à l'origine dépend du taux d'épargne donc s'il augmente, elle augmente aussi. le revenu d'état régulier à $t0$ au moment du choc, augmente, j'ai un déplacement vers le haut de mon sentier régulier de croissance, c'est un déplacement parallèle.

On a imaginé qu'au départ, on n'était pas sur le sentier régulier de croissance.

Si n change, ça ne change pas sa pente mais l'ordonnée à l'origine; si la population croît moins vite, ça change l'état régulier (côté malthusien du modèle de solow). On va avoir un phénomène de croissance.

Qu'est-ce qu'il se passe si on suppose que le progrès technique s'accélère ? On produit plus d'idées, une efficacité du travail qui augmente plus vite, on va avoir des effets différents.

Il y a quelque chose de paradoxal qui se produit, normalement, c'est censé être positif.
Si gamma augmente, ça change la pente, la courbe d'investissement de point mort va se redresser.
ɣ'>ɣ

Au point d'impact, k ne dépend pas de ɣ. L'écart se creuse entre les deux courbes : l'investissement de point mort est plus grand que l'investissement, on va avoir de la décroissance.

On arrive dans un état régulier plus bas que l'état régulier initial.

Au niveau de la croissance du revenu, on s'intéresse au deuxième schéma, comment le sentier de croissance régulier évolue ?

On s'interroge sur sa pente et sur l'ordonnée à l'origine.

Une augmentation du rythme du progrès technique change la pente de mon sentier équilibré, cette pente, on a supposé qu'elle augmente. Voir droite en pointillés (Sentier de croissance équilibrée du début) et en gras le nouveau sentier de croissance régulier. La droite pivote vers le haut.

Quand ɣ augmente, cela va réduire l'ordonnée à l'origine. Il y a un effet négatif de l'augmentation du rythme du progrès technique qui a pour effet d'augmenter l'investissement de point mort.

Quand il accélère, il faut mettre de côté plus de capital pour garder un stock de capital/unité de travail efficace constant. L'augmentation du progrès technique a un effet négatif au début.

Effets économiques à long terme ? On finira par être sur la droite en gras, la trajectoire à long terme est meilleure, on aura un niveau de vie plus élevé que ce qu'on avait eu avec un progrès technique plus lent.

Question délicate → l'évolution à court terme.

En termes économiques, quand ɣ augmente, baisse de k chapeau, explications :
⇒ on doit revenir sur la question "pourquoi ɣ est dans l'investissement de point mort ?"
Le progrès technique intervient comme une augmentation de la population, le nombre de travailleurs efficaces augmente.
Plus le progrès technique est rapide, on doit avoir plus de boîte à outils, c'est l'équivalent d'une augmentation de la population.

Au moment du choc, puisqu'on est à l'état régulier, on a une condition d'état régulier, la valeur de k chapeau au moment du choc est déterminée en partie par ɣ.

- Dynamique du prix des facteurs

Soit $\frac{Y}{AL} = f\left(\frac{K}{AL}\right)$, on peut écrire $Y = ALf\left(\frac{K}{AL}\right)$

Rappel: $\left[g[f(x)]\right]' = g'[f(x)].f'[x]$ (dérivation d'une fonction composée)

$$\frac{dY}{dK} = ALf'\left(\frac{K}{AL}\right).\frac{1}{AL} = f'(\hat{k}) = r + \delta$$

$$\frac{dY}{dL} = Af\left(\frac{K}{AL}\right) + ALf'\left(\frac{K}{AL}\right).\left(-\frac{KA}{(AL)^2}\right) = A\left[f(\hat{k}) - \hat{k}f'(\hat{k})\right] = w$$

Dans la première version, ça n'allait pas. Sans le progrès technique, les salaires n'augmentent pas or, d'après un des faits stylisés de Kaldor, à long terme on a une augmentation du niveau de vie qui suppose que les salaires augmentent.

Il faut, dans cette nouvelle version, reformuler les équations qui définissent la rémunération des facteurs, ces derniers sont rémunérés à la productivité Marginale.

Sur le sentier régulier :
$r + \delta$: le taux de profit brut est constant.

w : Le taux de salaire croît au taux de croissance du progrès technique.

LA RÈGLE D'OR D'ALLAIS-PHELPS

Il s'agit de savoir s'il y a un niveau d'épargne qui maximise la consommation, c'est le taux d'épargne de règle d'or, cela revient à supposer une intervention publique.

Que peut dire le modèle de Solow en matière de politique économique ?

Problème, quel est le taux d'épargne qui maximise la consommation par habitant ?

On a un effet contradictoire d'un accroissement du taux d'épargne :
- si l'investissement s'élève, ceci accroît le revenu d'état régulier et la consommation
- une fraction moins importante du revenu est laissée à la consommation.

On cherche le taux d'épargne qui maximise la consommation, on cherche en réalité k chapeau qui maximise la consommation.

Nous nous intéressons à la consommation sur le sentier régulier

$$\hat{c}^* = (1-s)\hat{y}^* = \mathrm{f}(\hat{k}^*) - s\mathrm{f}(\hat{k}^*)$$

$$\hat{c}^* = \mathrm{f}(\hat{k}^*) - (n+\delta+\gamma)\hat{k}^* car\ \dot{\hat{k}} = 0$$

On cherche à quelle condition $\hat{c}^*$ est à son maximum :

$$\frac{d\hat{c}(\hat{k})}{d\hat{k}} = f'(\hat{k}) - (n+\gamma+\delta) = 0$$

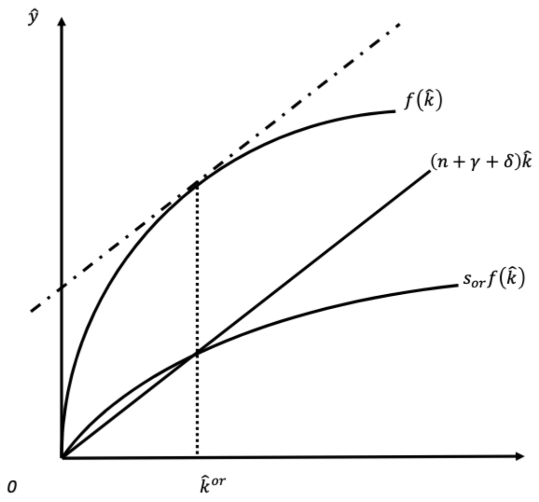
On doit avoir: $f'(\hat{k}^*) = n+\gamma+\delta$ ou $\boldsymbol{r = n + \gamma}$ $(car\ f'(\hat{k}^*) = r + \delta)$

Le taux d'intérêt net de l'économie doit être égal au taux de croissance démographique plus le taux de croissance de l'efficacité du travail.

Ce résultat permet de déterminer la valeur de k chapeau qui maximise la consommation

- Détermination graphique du capital par unité de travail efficace d'or

Que nous montre ce graphique ?



Comment faire pour maximiser la consommation de la population de cette économie à l'état régulier?

Consommation : écart vertical entre la courbe de la fonction de production et la courbe d'investissement.

D'après ce qui précède, cet écart est maximal à l'état régulier qd la pente de la fonction de production est égale à la pente de la droite d'investissement de point mort. C'est le cas pour $\hat{k}^{or}$ sur le graph.

Il s'agit ensuite de fixer le taux d'épargne pour que la courbe d'investissement coupe la courbe d'investissement de point mort en ce point.

LA CONVERGENCE CONDITIONNELLE

Avec le modèle de Solow on peut s'interroger sur les effets à long terme d'une guerre qui détruit le stock de capital d'un pays.

Que dit le modèle sur les effets à long terme d'une guerre qui détruit le stock de capital d'un pays ?

La production s'effondre d'un coup mais à long terme, on va finir par revenir où on était déjà, sur le sentier de croissance initial, à l'état régulier, on a une convergence qui va s'opérer.

Si le capital est détruit, la production baisse fortement.

La guerre ne change pas ma capacité à faire des progrès techniques, donc γ ne change pas.

Cette guerre ne change pas ma trajectoire de long terme mais elle m'en écarte.

Il va y avoir une phase de croissance plus rapide que la croissance de long terme.

La France et le Royaume-Uni ont eu une croissance très rapide durant les 30 Glorieuses car on a détruit une partie de l'économie, on a dû tout reconstruire d'un coup.

Il y a une convergence dans le modèle, si on s'écarte, on y revient.

Que dit le modèle sur l'évolution de deux pays similaires excepté leur stock de capital/tête ? On peut avoir des pays identiques (même taux d'épargne, même progrès technique, même rythme d'augmentation de la population).... Mais aujourd'hui, ils n'ont pas le même stock de capital, ils ne sont pas au même point dans le processus de croissance.

Que va dire le modèle ? Le pays va finir par rejoindre la trajectoire de l'autre pays. C'est l'idée d'une convergence.

Deux pays identiques dans leur structure vont converger.

- Prédiction du modèle de Solow concernant la convergence

Est-ce-que cela veut dire que tous les pays du monde vont arriver au même niveau de richesse ?

Le modèle de Solow ne dit pas que tous les pays vont converger vers le même niveau de richesse car pour qu'ils convergent tous, il faut qu'ils soient tous identiques.

⇒Qu'est-ce qu'une structure identique?
La structure renvoie à toutes les données du modèle: s, n, δ, α, A et γ.

Si leur structure est différente, ils ne vont pas converger. Chaque pays va converger vers son propre sentier. C'est ce que l'on appelle la convergence conditionnelle, le modèle prédit une convergence conditionnelle, la convergence dépend de la structure. Des pays vont converger à condition qu'ils aient la même structure.

Imaginons que pour tous les pays du monde, le progrès technique soit le même mais dans les autres paramètres, c'est différent. Ils vont avoir une trajectoire différente, ils convergent différemment.

Ce qu'on observe empiriquement c'est qu'effectivement, tous les pays du monde ne convergent pas. Il y a une convergence de clubs, les pays de l'OCDE convergent et les pays pauvres aussi (les uns des autres).

Problème : Pourquoi les structures ne convergent-elles pas ? C'est ce que l'on va voir dans le chapitre 3.

Chapitre 3 : Le modèle de Solow face aux données empiriques

On va discuter de la confrontation du modèle aux données empiriques.

1. Des prédictions qualitativement conformes aux faits observés

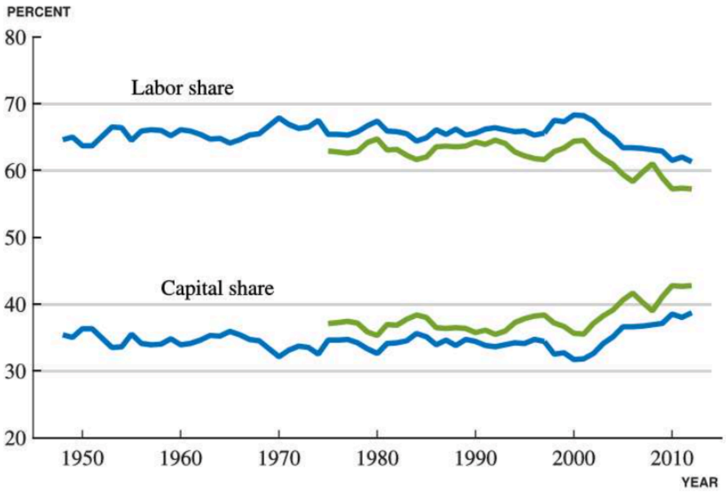
- Le modèle de Solow et les "faits stylisés" de Nicholas Kaldor (1961)

Nicolas Kaldor est un économiste anglais qui a établi une liste de faits stylisés, faits qui sont vrais dans le long terme (globalement).

Un avantage du modèle de Solow est qu'il réplique tous ses faits stylisés, il est conforme à tous ses faits stylisés, qui sont les suivants :

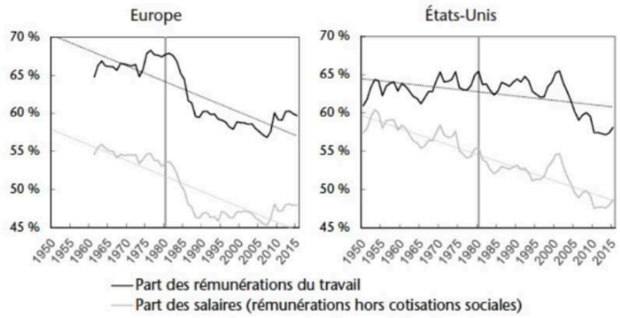
- croissance continue du PIB par tête à un taux approximativement constant sur de longues périodes
- le capital par travailleur augmente à un taux approximativement constant sur de longues périodes de temps
- le rendement du capital est approximativement constant sur de longues périodes
- le ratio capital sur production K/Y (coefficient de capital) est approximativement constant sur de longues périodes.
- les parts des facteurs dans le revenu national sont approximativement constantes
- Les taux de croissance de la productivité varient d'un pays à un autre

Figure 6: Capital and Labor Shares of Factor Payments, United States



Note: The series starting in 1975 are from Karabarbounis and Neiman (2014) and measure the factor shares for the corporate sector, which the authors argue is helpful in eliminating issues related to self-employment. The series starting in 1948 is from the Bureau of Labor Statistics *Multifactor Productivity Trends*, August 21, 2014, for the private business sector. The factor shares add to 100 percent.

Part du travail dans la valeur ajoutée, Europe et États-Unis
1950-2015



Note : ce graphique montre la part des rémunérations du travail (salaires et traitements, avec (noir) et sans (gris) les cotisations sociales) dans la valeur ajoutée des sociétés non financières. Le trait gris vertical marque le début des années 1980. Les traits en pointillés tracent les tendances linéaires.

Source : calculs des auteurs à partir de données d'Eurostat et de la Réserve fédérale américaine.

Auteurs: Sophie Piton et Antoine Vatan (2018)

2. **La comptabilité de la croissance ou la mesure du progrès technique**

Solow (1957) puis Edward Denison et Dale Jorgenson… On a:

$$Y = BK^{\alpha}L^{1-\alpha} \quad \Rightarrow \frac{\dot{Y}}{Y} = \alpha\frac{\dot{K}}{K} + (1-\alpha)\frac{\dot{L}}{L} + \frac{\dot{B}}{B} \text{ où } \; B = A^{1-\alpha}$$

B : productivité totale des facteurs

Cette équation nous donne $\boldsymbol{g_B}$ à partir des chiffres de la comptabilité nationale (taux de croissance de *Y, K* et *L* ainsi que α).

On peut aussi noter que $y = Bk^{\alpha} \Rightarrow \; g_B = g_y - \alpha g_k$

Mais **d'après le modèle** de Solow $g_y = g_k = g_A$ à l'état stationnaire

Le modèle prédit: $\frac{g_B}{g_y} = 1 - \alpha = 2/3$ … Que disent les faits?

En 1957, Solow propose une technique pour mesurer le progrès technique. Cette astuce part de la fonction de production Cobb douglas.

Les données de la comptabilité nationale (INSEE en France), permettent de calculer le taux de croissance du PIB, le taux d'accumulation du capital, le taux de croissance démographique, si on peut les calculer et qu'on connaît ɑ, on peut déduire de cette équation le rythme du progrès technique.

Une fois qu'on a fait ça, on peut tester la prédiction principale du modèle de Solow.

Quand on regarde les pays avancés, la prédiction du modèle concernant la croissance du PIB/habitant se vérifie approximativement.

- Une validation empirique du modèle

Si on regarde les taux de croissance de y et de A pour la période 1950-1973, on obtient :

France: gy = 4,8% et gA = 5,3%
Japons: gy = 7,1 et gA = 7
Etats-Unis: gy = 3,4 et gA = 3,7

Années 1973-2003:

France: gy = 2% et gA = 1,6%
Japon: gy = 2 et gA = 1,3
Etats-Unis: gy = 1,7 et gA = 1,8

Si on regarde les pays développés, ça marche assez bien,le rythme du progrès technique est assez proche de gy.

À partir de la fin des années 70, on a un très net ralentissement des gains de productivité jusqu'à la fin des années 90 avec un retour du progrès technique qui se rétablit plus ou moins (ralentit à nouveau lors de la crise de 2008).

La croissance est-elle exceptionnellement rapide pendant les 30 Glorieuses ? ou bien la période des années 1970 est-elle une période caractérisée par des idées spéciales ?

On peut décomposer davantage les sources de la croissance pousser plus loin l'analyse dans le temps :

- 1995-2000 : on voit remonter le taux de croissance de la productivité totale des facteurs et on peut l'associer à une augmentation de l'accumulation de capital dans le secteur des technologies. Cette tendance se maintient de façon moins vigoureuse dans les années 2010.

Il faut noter que ces données empiriques valident l'hypothèse d'économies sur le sentier régulier de croissance pour la France, le Japon et les USA.

Robert Gordon considère qu'on est partis pour un ralentissement durable du progrès technique qui serait dû à l'épuisement des grandes innovations du 20è siècle, on est mtn dans des innovations liées au nouvelles technologies. Ces nouvelles innovations n'auraient pas des effets forts que les gains de productivité donc moins de croissance.

- Croissance à long terme fondée sur les gains de productivité

Solow (1957) trouve que 87,5% de la croissance américaine est expliquée par le “progrès technique”, pourquoi pas 100% ?

Il est possible que dans certains pays on ait pas l'égalité entre $gA\ et\ gy$, ces taux ne sont pas égaux car les économies sont dans des dynamiques transitionnelles.

Cf dragons asiatiques → ils avaient des taux de croissance très élevés. On s'aperçoit pour la Corée du Sud, Taiwan et Singapour que le progrès technique est plus lent que la croissance, dans ce cas précis, le modèle de Solow nous dit que la croissance ne s'explique pas par le progrès technique, elle est transitionnelle surtout liée à une combinaison de facteurs (augmentation du capital humain, accumulation du capital rapide…), tout cela explique davantage la croissance que le progrès technique. Est-ce que la croissance va s'épuiser dans ces pays ? Au Japon, la croissance a été très rapide puis ça c'est tassé.

Alwyng Young (1995) et les cas de la Corée du sud, Singapour et Taïwan vs Hong Kong : les cas ou la croissance de la PTF n'explique qu'une faible fraction de la croissance du PIB

⇒Croissance tirée par l'accumulation des facteurs et pas par la croissance de la PTF

⇒Entre 1966 et 1990, *A* baisse légèrement à Singapour… Alors qu'elle augmente de près de 4% à Hong Kong.

⇒Forte croissance de nature transitionnelle dans ces pays: liée à l'investissement élevé en capital et dans l'éducation mais c'est temporaire…

⇒ L'investissement passe de 11% du PIB à 40% à Singapour entre 1966 et 1990.

⇒Accroissement du niveau d'éducation avec une part de la population ayant un niveau bac qui passe de 15,8 à 66,3% sur la période (Singapour).

⇒Le gouvernement lance une campagne en 1996 pour faire croître la productivité dans le pays.

⇒Hsieh (2002) montre que le phénomène est surestimé par Young à cause d'une surestimation de la croissance du capital par travailleur.

Les limites de l'analyse en termes de comptabilité de la croissance, ces limites sont encore plus fortes avec le modèle de solow basique. Si on revient à l'équation ci-dessous, on voit que cette équation fait apparaître le progrès technique comme un résidu

$$Y = BK^{\alpha}L^{1-\alpha} \quad \Rightarrow \frac{Y}{Y} = \alpha\frac{K}{K} + (1-\alpha)\frac{L}{L} + \frac{B}{B} \text{ où } \quad B = A^{1-\alpha}$$

Comment on l'obtient ? En mesurant effectivement, on construit des données statistiques pour mesurer l'évolution du PIB, on calcule l'évolution du stock de capital fixe + données sur la population (recensement régulier de l'INSEE…), on en déduit le rythme du progrès technique. C'est un résidu. Dans ce progrès technique, il y a plein de choses qui peuvent se cacher.

Dans cette équation, il y a quelque chose qui n'est pas pris en compte : qualité des travailleurs, le capital humain en général (leur santé…), niveau de compétence (niveau d'éducation qui peut varier d'un pays à l'autre), possibilité qu'il y ait une concurrence imparfaite, infrastructure politiques (institutions).

Tous ces facteurs sont captés par B, le résidu est un résidu car on obtient ce qu'il reste, la dedans va se cacher plusieurs choses qui contribue à augmenter la productivité des travailleurs (ex : si les travailleurs sont plus éduqués, ils sont plus productifs, si le pays investit dans les infrastructures routières, les entreprises vont être plus productives…).

Selon Moses Abramovitz, 1957, grand économiste et spécialiste de la théorie de la croissance et de la mesure du progrès technique, ce dernier est la mesure de notre ignorance,

Dans les années 1960-70, certains économistes vont chercher à affiner la mesure du progrès technique en distinguant l'investissement dans l'éducation, dans la santé… Cela conduit certains (notamment Jorgenson et Griliches) à corriger la mesure des facteurs en arrivant à $gB \ = \ 0$.

Quand on étudie les perturbations cycliques, on s'intéresse beaucoup aux variations de A, au fait que A puisse varier brutalement d'année en année (choc), on va utiliser ce choc pour expliquer les fluctuations de l'économie.

3. Le modèle de Solow et les écarts de revenu internationaux

Certains succès du modèle de Solow, mais difficulté du modèle de Solow. Il y a un échec qui va motiver une dernière modification du modèle qui permettra de le "sauver".

Le modèle de Solow avec progrès technique n'obtient pas de bons résultats quantitatifs lorsqu'il s'agit d'expliquer les écarts de revenu entre pays.

Le problème → Mesure de prédiction ou de l'explication des écarts de revenus entre les pays. Ecq le modèle de Solow peut expliquer pourquoi certains pays ont des PIB/hab très faibles et d'autres très forts ?

En résumé, si on prend le modèle de Solow avec progrès technique, on a des bons résultats qualitatifs; il dit des choses raisonnables qualitativement c'est-à-dire que le modèle va prédire correctement que de pays qui ont un faible taux d'épargne, un faible taux de croissance démographique, un niveau de techno bas… vont avoir des revenus/hab faibles.

Le modèle donne une prédiction sur les valeurs de l'État stationnaire. Pour certaines valeurs, on a des pays qui sont pauvres, ce qui correspond à ce qu'on observe dans la réalité. Le modèle voit bien dans quel sens se font les écarts. Le problème est qu'il sous estime très fortement les écarts.

Pour expliquer les écarts de revenu observés, le modèle de Solow doit supposer des écarts de capital par tête irréalistes. Dit autrement, le modèle de Solow avec progrès technique implique de très forts écarts de rendement de capital. Pourquoi le capital ne se déplace pas des pays riches vers les pays pauvres ?

Mankiw, Romer et Weil (1992) vont venir au secours du modèle de Solow.

Le modèle avec progrès technique prédit des écarts de 1 à 4 entre les pays les plus pauvres et les plus riches alors que dans la réalité, on observe plutôt des écarts de 1 à 40.

On peut utiliser le modèle pour prédire les taux d'intérêt en partant des revenus des différents pays, on peut prédire le rendement du K qui doit exister dans les différents pays.

Avec les équations du modèle, on peut prédire des écarts de taux du rendement de capital. Il prédit de grands écarts de taux d'intérêt entre les pays pauvres et les pays riches. Il sur estime les écarts de rendement du capital. Dans la réalité, on n'observe pas des écarts aussi élevés car sinon, le capital se déplacerait, c'est pas ce qu'on observe.

Le modèle n'est pas suffisant.

Cela donne lieu à un travail de 3 économistes au début des années 1990 : grégory Mankiw, David Romer et David Weil (1992)

Ils vont montrer l'insuffisance du MDS dans sa version avec PT puis ils vont montrer comment on peut le sauver. Afin de le sauver, ils introduisent une nouvelle variable qu'est la variable capital humain.

On distingue le capital physique (machines, …) du capital humain (niveau de compétence des travailleurs, qui est lui-même distingué du progrès technique).

- Capacité de prédiction de l'écart de revenus entre pays du modèle de Solow

Comment le modèle prédit-il les écarts de revenu entre les pays ?
Le modèle de Solow établit des valeurs d'État régulier pour le revenu (y *)

On a $y_i^* = A_i \left(\frac{s_i}{\delta+n+\gamma}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$

<u>Coquille : α/(1-α) en puissance</u>
Une fois que l'on a fait ca, on peut prédire des écarts,on calcule des ratio (entre le pays i et le pays j) :

D'où $\frac{y_i^*}{y_j^*} = \frac{A_i\left(\frac{s_i}{\delta+n+\gamma}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{A_j\left(\frac{s_j}{\delta+n+\gamma}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} = \left(\frac{s_i}{s_j}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$

Soit des taux d'épargne de 20% et 5% pour une part du capital de ⅓. Le modèle prédit un écart de revenu à l'état stationnaire de 1 à 2. On peut comparer ce type de prédiction aux données empiriques :

$$\frac{y_i^*}{y_{US}^*} \;/\; \frac{y_j^*}{y_{US}^*}$$

D’après le modèle de Solow, le revenu du pays i doit être 2, 3, 4 fois… le revenu du pays j

Le modèle sous estime très fortement les écarts. Jones indique qu'une mesure de l’écart moyen entre les pays les plus pauvres et les plus riches est de 40.

- Test de Mankiw, Romer et Weil

Mankiw, Romer et Weil dans “A contribution to the empiric of neoclassical growth model’s” testent la prédiction du modèle de Solow concernant le revenu d’état stationnaire sur un échantillon de 98 pays issus du travail de Summers et Houston (1988 : Penn World Table).

D'après le modèle de Solow avec progrès technique, on a :

$$\hat{y}* = \left(\frac{s}{n+\gamma+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Et

$$\hat{y} = \frac{Y}{AL} \Rightarrow y = A\hat{y}$$

D’où

$$y(t) = e^{\gamma t}\left(\frac{s}{n+\gamma+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Après (log) linéarisation on obtient:

$$lny_t^* = \gamma t + \frac{\alpha}{1-\alpha}(\ln s - \ln(n+\gamma+\delta))$$

Ils estiment cette équation et obtiennent une valeur pour **α/(1-α)** qui implique une part du capital dans le PIB de 60% (α = 0,6).

On devrait avoir **α = ⅓** mais on a **α : ⅔ (environ).**

Ils vont introduire le capital humain dans le modèle.

Mankiw, Romer et Weil (1992) estiment cette équation :

$$\ln y_i = a + b\,(\ln s_i - \ln(n_i + 0.05)) + \epsilon_i$$

- Données transversales, 98 pays indicés par i
- Pour chaque pays, y_i est la valeur de 1985, s_i et n_i les données moyennes sur 1960-1985
- $\lambda + \delta = 0.05$

Ils obtiennent :

$$\ln y_i = \underbrace{6.87}_{(0.12)} + \underbrace{1.48}_{(0.12)}(\ln s_i - \ln(n_i + 0.05))$$

$$R^2 = 0.59$$

- coefficients de s_i et n_i : bons signes et très significatifs
- différences de s_i et n_i expliquent une bonne partie des disparités de PIB par tête
- mais $b = \frac{\alpha}{1-\alpha}$ est trop grand : donne $\alpha \simeq 0.6$

- Solution : introduire le capital humain dans le modèle

Il y a une accumulation de capital physique, mais aussi une accumulation de capital humain. On a deux équations dynamiques.

$$\dot{K} = s_K Y - \delta K$$
$$\dot{H} = s_H Y - \bar{H}$$

Comment mesurer le capital humain ? Leur démarche consiste à regarder dans tous les pays considérés la population de jeunes de 12 à 17 ans puis ils regardent quelle propension de cette population est scolarisée, c'est ce qui définit sH. C'est le niveau de qualification du travail considéré comme le résultat d'un investissement éducatif.

On écrit:

$$Y = K^{\alpha} H^{\beta} (AL)^{1-\alpha-\beta}$$

Ou:

$$\hat{y} = \hat{k}^{\alpha} \hat{h}^{\beta}$$

Avec les lois d'accumulation suivantes:

$$\dot{K}_t = s_K Y_t - \partial K_t$$
$$\dot{H}_t = s_H Y_t - \partial H_t$$

• D'où

$$\dot{\hat{k}} = s_K\hat{y} - (n+\gamma+\delta)\hat{k}$$
$$\dot{\hat{h}} = s_H\hat{y} - (n+\gamma+\delta)\hat{h}$$

On peut linéariser ce système à l'état stationnaire pour déterminer les valeurs de k et h correspondantes. On peut ainsi obtenir:

$$\hat{y}^* = \left(\frac{s_K^{\alpha} s_H^{\beta}}{(n+\gamma+\delta)^{\alpha+\beta}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}$$

Après linéarisation, MRW obtiennent l'équations qu'ils estiment.

Passage en log :

$$\ln y_t^* = \lambda t + \frac{1}{1-\alpha-\gamma}\left(\alpha \ln s_K + \gamma \ln s_H - (\alpha+\gamma)\ln(n+\lambda+\delta)\right)$$

Mankiw, Romer et Weil (1992) estiment cette équation :

$$\ln y_i = a + b_K(\ln s_{Ki} - \ln(n_i + 0.05)) + b_H(\ln s_{Hi} - \ln(n_i+0.05)) + \epsilon_i$$

s_{Ki} : taux d'investissement I_i/Y_i
s_{Hi} : proxy (pourcentage de la population en âge de travailler qui est dans le secondaire)
Ils obtiennent (même échantillon) :

$$\ln y_i = \underbrace{7.86}_{(0.14)} + \underbrace{0.73}_{(0.12)}(\ln s_{Ki} - \ln(n_i+0.05)) + \underbrace{0.67}_{(0.07)}(\ln s_{Hi} - \ln(n_i+0.05))$$

$$R^2 = 0.78$$

Ceci donne $\alpha = 0.31$ et $\gamma = 0.28$

Si on prend tous les pays d'Europe, va-t-on observer de grands écarts ? Non, le problème se joue dans la poursuite d'études au-delà du BAC dans les pays avancés, développés. C'est une mesure partielle car elle ne dit rien au niveau de l'école élémentaire ni au niveau des études supérieures. L'observation n'est pas très fine. Il est plus judicieux de regarder le parcours d'étude en entier (durée des études).

Une fois qu'ils ont intégré cette équation, ça améliore la capacité prédictive du modèle. Une fois que l'on prend en compte le capital humain, le modèle explique 80% des écarts constatés entre les pays riches et les pays pauvres.

Ce modèle permet d'expliquer 80% de l'écart de revenu constatée au niveau mondial.

C'est un modèle qui implique des écarts de rendement du capital moins forts et permet de mieux comprendre l'absence de convergence au niveau mondial en tenant compte des imperfections du monde réel.

Conclusion : une défense du modèle de Solow qui permet de prédire sans trop d'erreur les écarts de revenu observés et de comprendre les écarts de taux de croissance et l'absence de convergence au niveau mondiale.

Limite persistante du modèle → comment expliquer les écarts structurels constatés ?
Comment agir sur ces écarts ?

Une approche très grossière des investissements en capital humain.

4. Le modèle avec capital humain de Jones

Dans son manuel, Charles Jones propose une version plus simple du modèle de Solow augmenté du capital humain en supposant que la durée de la scolarisation est une donnée exogène.

L'objectif est de déterminer l'équation du revenu d'état stationnaire à partir d'un modèle de Solow qui tienne compte de la distinction entre efficacité du travail A, capital humain h et travail L.

Fonction de production avec capital humain :

$$\boldsymbol{Y = K^{\alpha}(AH)^{1-\alpha}}$$

On réécrit la fonction de production en introduisant un facteur h.

$$A \times h \times L$$

$h \rightarrow$ c'est un facteur qui va dépendre de la durée d'étude, en fonction de la durée d'étude moyenne dans le pays, les travailleurs vont être dotés d'un capital humain individuel plus ou moins grand. S'ils font des études courtes, h sera faible et h sera élevé s'ils font des études longues.

$H \rightarrow$ le capital humain d'un individu x le stock de travailleurs,c'est le stock total de capital humain.

On postule :

$$H = e^{\psi u}L$$

H est le stock de capital humain. C'est le stock de capital humain *h* multiplié par le nombre de travailleurs. On suppose donc ici que $h = e^{\psi u}$. *u* est la durée de la scolarisation ou durée d'étude. Et ψ est le rendement d'une année d'étude supplémentaire. Les études en économie de l'éducation (Jacob Mincer) on aboutit à la conclusion que ψ est en moyenne égal à 10%.

Dans ce modèle, un travailleur gagne wh.

Vous pouvez vérifier que $\frac{dh}{du}\frac{u}{h} = \psi u$.

ψ*u* est l'élasticité de *h* par rapport à *u*. On en déduit:

$$\frac{dh}{h} = \psi du$$

Si *u* varie d'une année, ψ indique la variation de *h* en pourcentage et par conséquent la variation de *wh*, la rémunération d'un travailleur.

$h = e^{\Psi u}$

↑ Jacob Miner

Le problème consiste à lire cette expression,

h est une fonction exponentielle

$u \rightarrow$ durée des études

$\Psi \rightarrow$ rendement d'une année d'étude supplémentaire, mesure ce que va apporter une année d'étude supplémentaire, c'est une approximation de 10%.

On cherche à calculer la variation de h par rapport à u :

$h = e^{\Psi u}$ $\qquad (e^{u})' = u' e^{u}$

$$\frac{\partial h}{\partial u} = \Psi e^{\Psi u}$$

$$\Rightarrow \partial u \, \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial u} = \Psi h \times \frac{1}{h} \times \partial u$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial h}{h} = \Psi \times \partial u}$$

$$\frac{\partial h}{h} = 0{,}10 \times 1 = 10\,\%$$

Quand le le capital humain augmente de 10%, c'est notre rémunération qui augmente de 10%.

- Équation dynamique

On peut écrire :

$$y = k^{\alpha}(Ah)^{1-\alpha}$$

Notez que h est constant ici car on suppose que u et ψ sont constants.
On peut alors retrouver un modèle similaire au modèle de Solow avec progrès technique en divisant les variables *y* et *k* par *Ah*.

$$\hat{y} = \hat{k}^{\alpha}$$

On peut ainsi retrouver l'équation dynamique suivante:

$$\dot{\hat{k}} = sf(\hat{k}) - (n + \gamma + \delta)\hat{k}$$

Mais ici attention. On a $\hat{k} = \frac{K}{AhL}$

Ici, chaque pays va être associé à une valeur de h qui est fixe, c'est une première approximation.

slide 74 :

$Y = K^{\alpha}(AH)^{1-\alpha}$ avec $H = e^{\psi u} L$

$H = hL$

$$\Rightarrow \frac{Y}{AhL} = \frac{K^{\alpha}(AhL)^{1-\alpha}}{AhL} = \frac{K^{\alpha}\cancel{(AhL)^{1-\alpha}}}{(AhL)^{\alpha}\cancel{(AhL)^{1-\alpha}}}$$

$\boxed{\hat{y} = \hat{k}^{\alpha}}$ car : $\hat{y} = \frac{Y}{AhL}$ et $\hat{k} = \frac{K}{AhL}$

$$\hat{k} = \frac{K}{AhL}$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{h}}{h} - \frac{\dot{L}}{L}$$

$\frac{\dot{h}}{h} = 0$ car h est constant.

on se retrouve avec :

$$\frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} = \frac{sY - \delta K}{K} - (n + \gamma)$$

La dynamique d'ensemble du modèle ne pas être différente lorsque h est constant. (sujet examen).

On retrouve bien sûr la même solution à l'état régulier pour le revenu:

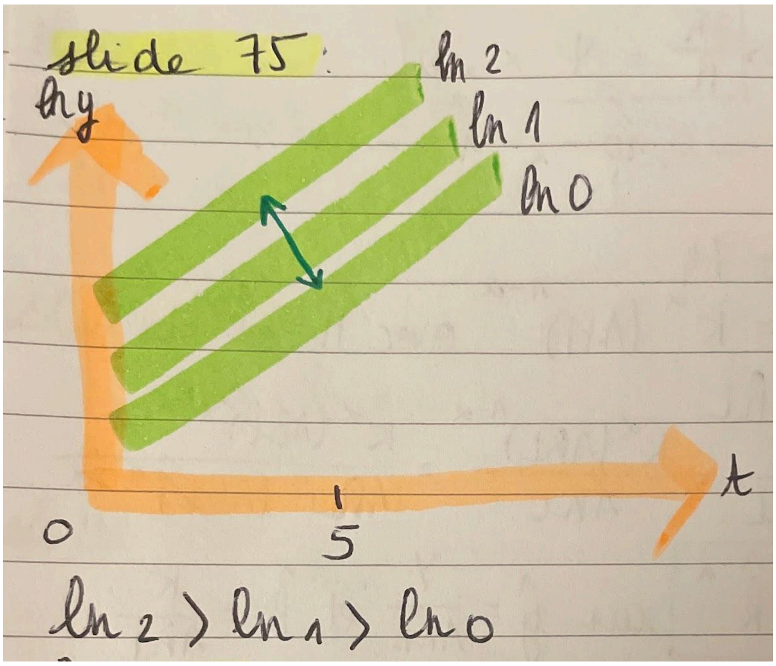
$$\hat{y}^* = \left(\frac{s}{\delta + n + \gamma}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

D'où

$$y^* = Ah\left(\frac{s}{\delta+n+\gamma}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Si on connait les variables A, h, s, δ, n, γ et α, cette équation indique le revenu d'état régulier prévu par le modèle de Solow avec capital humain.

h intervient dans la définition du revenu de l'État régulier.



Plus on a de capital humain, plus la trajectoire remonte dans le plan, à un moment donné, on va avoir un revenu qui sera plus élevé. h fait partie des facteurs qui vont expliquer les écarts de revenu.

Pour étudier la qualité des prédictions du modèle, on s'intéresse au revenu des pays relativement à celui des USA :

y/yus.

Jones procède en deux étapes. Il fait l'expérience en supposant d'abord que A est identique d'un pays à l'autre.

Hypothèses supplémentaires :

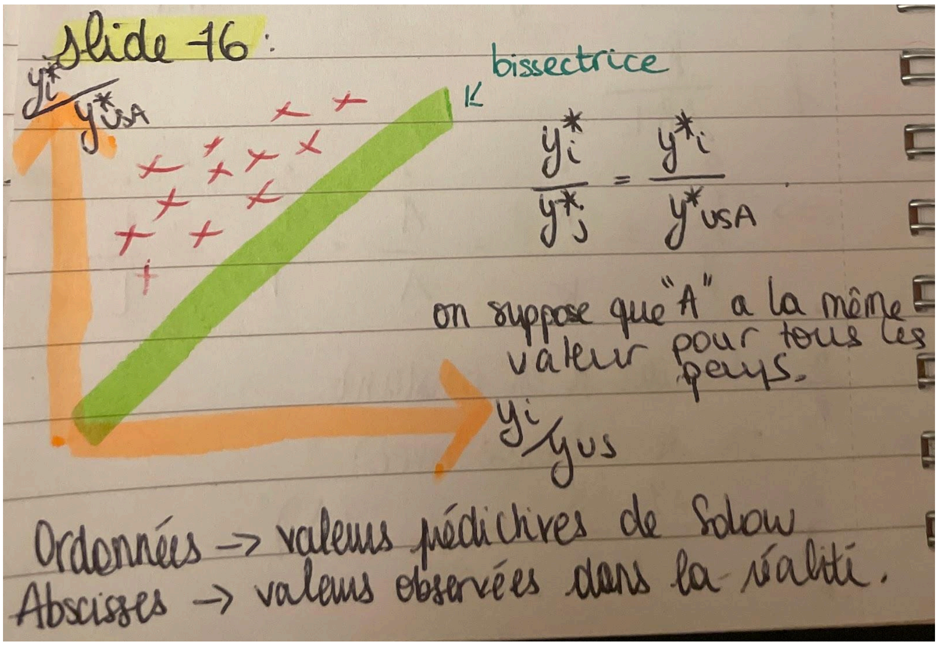
$\alpha = 1/3; \psi = 0{,}10; \delta + \gamma = 0{,}075$

On tient compte des valeurs empiriques constatées pour les autres paramètres du modèle ($n,\ s,\ u$).

Exercice : on compare le revenu effectif d'un pays relativement au revenu effectif des USA et la prédiction du modèle correspondant aux revenus d'état stationnaire.

Si la prédiction est bonne, on peut construire un graphique dans lequel les pays sont représentés par des points sur la bissectrice.

quand il calcule les ratio par rapport aux USA :



Par hypothèse, on attribue les écarts de revenu aux facteurs suivants : taux de croissance de la population, d'épargne et le capital humain/travailleur;

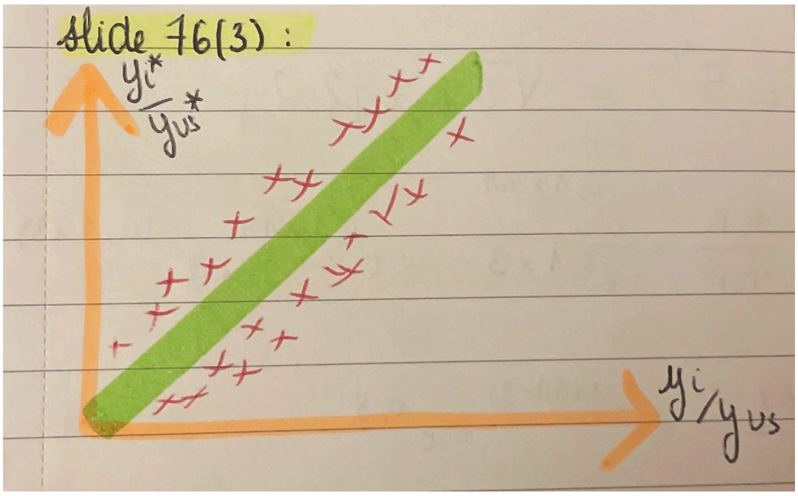
Si les écarts de revenu constatés sur les USA sont exactement égaux aux écarts constatés par le modèle de Solow, on est sur la bissectrice.

Première étape → croix rouge, les pays pauvres ont des revenus sur estimé par le modèle de solow.
Le modèle sur estime le revenu des pays pauvres.

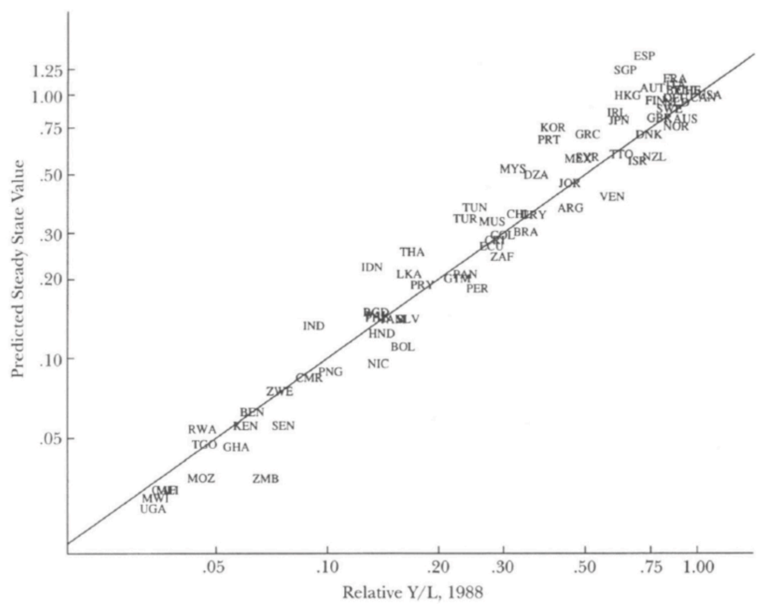
Dans un deuxième temps, Jones corrige l'hypothèse sur A,

$$A = f(h, y, k, \alpha)$$

Jones montre :



Steady State Incomes, Based on Current Policies



Une fois qu'on tient compte des écarts d'efficacité du travail, on s'aperçoit que le modèle avec le capital humain produit très bien les écarts de revenu entre pays.

slide 76(4):

$$\frac{y^*_{Riche}}{y^*_{Pauvre}} = 40 = \frac{A_R}{A_P} \times \frac{h_R}{h_P} \times \left(\frac{s_R}{s_P}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \times \left(\frac{\delta_P + n_P + \gamma_P}{\delta_R + n_R + \gamma_R}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Il montre que la source majeure des variations vient de A, $h\ et\ s$ si le dernier terme est le même pour tous les pays.

Lorsque A est supposé constant, les prédictions du modèle sont bonnes sur le plan qualitatif (classement des pays correct) mais le revenu relatif des pays pauvres est surestimé.

Les pays s'alignent sur la diagonale si on tient compte des écarts de A mesurés à partir de notre fonction de production.

On peut alors décomposer les sources de l'écart de richesse entre pays :

- Le taux d'épargne des pays riches est en moyenne 25% contre 5% pour les pays pauvres. Un facteur de 1 à 5. Si on calcule sa racine carré, on montre que cela explique un écart de 1 à 2 entre pays pauvres et pays riches.

$$\left(\frac{0{,}25}{0{,}05}\right)^{\frac{1/3}{1-1/3}} = (5)^{1/3 \times 3/2}$$

$$= 5^{1/2} = \sqrt{5} \approx \boxed{2{,}2}$$

$$\frac{h_R}{h_P} = \frac{e^{0{,}1 \times 11}}{e^{0{,}1 \times 3}} = e^{0{,}1 \times 11} \times e^{-(0{,}1 \times 3)}$$

$$\frac{h_R}{h_P} = e^{0{,}1(11-3)} = e^{0{,}8}$$

$$\Rightarrow \frac{h_R}{h_P} \approx \boxed{2{,}2}$$

- La durée de scolarisation dans les pays est en moyenne de 11 ans contre 3 dans les pays pauvres.

Par construction, le reste de l'écart entre pays riches et pays pauvres doit être lié aux écarts de productivité soit un facteur 10.

$40 = 2\text{x}2\text{x}10$

La limite de ce résultat est que ces écarts technologiques sont un résidu mais plein de choses sont cachées dans ce résidu (investissements en infrastructures, système éducatif, système juridique, financement de la recherche…).

Jones laisse de côté les écarts de taux de croissance démographique qui expliquent aussi une part des écarts de richesse.

Le modèle de Solow corrigé propose une explication assez convaincante des écarts de revenus : les écarts effectifs correspondent aux écarts prédits par le modèle.

Le modèle prédit que certains pays vont dépasser les USA (Espagne et France par exemple).

D'après cette analyse, les écarts de revenu sont dûs en grande partie aux écarts de A et de s. n jouerait un moins grand rôle.

C'est un modèle qui permet d'organiser la réflexion sur les écarts de richesse, on peut voir que la faiblesse est plutôt u, s, n ou encore h.

Ce modèle a des limites, il ne dit pas ce qu'il se passe derrière les écarts de valeurs de A.
Le modèle ne nous dit pas pourquoi la durée d'étude est petite ou grande.

De quoi dépend A ? Beaucoup de choses peuvent intervenir à ce niveau. Et on ne sait pas non plus de quoi dépend s, u *ou* n…

Dans l'analyse qui précède, on a fait comme si les pays étaient toujours à l'État régulier, on arrive à expliquer assez bien les écarts de revenu. Dans la réalité, on peut voir des écarts de taux de croissance, ces derniers peuvent être reliés au fait qu'on a des pays qui sont dans des phases de croissance transitionnelle.

Ceci peut expliquer des écarts de taux de croissance d'après le modèle de Solow. Mankiw, Romer et Weil (1992) montrent que la prédiction du modèle de Solow sur ce point correspond aux données : plus le revenu d'un pays est sous sa valeur d'état régulier, plus sa croissance est forte et inversement.

On va surtout observer des écarts de taux de croissance liés au fait que les pays ne sont pas sur leur sentier régulier. De ce point de vue, la prédiction du modèle de Solow qui est importante c'est que si un pays est sous son sentier régulier de croissance, il va avoir une croissance plus rapide que les autres. C'est aussi quelque chose qui a été testé. Certains économistes montrent que le modèle de Solow fait des bonnes prédictions concernant le sentier régulier de croissance.

Le modèle de Solow permet de prédire le niveau de revenu d'un état régulier d'un pays. S'il y a un tel écart par rapport au revenu d'état régulier, le taux de croissance va être supérieur ou inférieur à γ.

Le modèle de Solow insiste beaucoup sur les trajectoires mais dans la réalité, les pays sont soumis en permanence à des chocs, qui les écartent de la trajectoire. La plupart du temps, les pays ne sont pas sur la trajectoire de long terme (guerres, bombardements, catastrophes climatiques, chocs politiques,...).

Jones a fait des tentatives afin de faire le point sur les chocs qui peuvent heurter la croissance.

On a identifié, dans des études économiques, 145 chocs différents qui peuvent sortir un pays de sa trajectoire de sentier régulier.

La convergence conditionnelle, terme important. On a vu dans les données qu'il n'y avait pas de convergence absolue mais seulement conditionnelle. On doit être capable d'expliquer que ce fait peut être expliqué par le modèle de Solow. Ce dernier dit que les pays vont converger vers des trajectoires différentes s'ils ont des structures différentes.

Dit autrement, le modèle de Solow peut fournir une interprétation convaincante de l'absence de convergence absolue au niveau mondial. Si un pays régresse c'est que son revenu d'état régulier a diminué…

De très nombreux facteurs peuvent faire s'écarter un pays de l'état stationnaire et le placer en situation de croissance transitionnelle (augmentation du prix de l'énergie, choc politique, réforme de grande ampleur, guerre, évènement climatique…).