$$f(k) = \begin{cases} \dfrac{\tau^{k-1}}{(k-1)!} \lambda^{k} e^{-\lambda \tau} & \text{avec } \tau \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

↳ loi d'Erlang : pour représenter le temps au bout duquel un évènement donné se produit.

Fonction de vraisemblance :

$$L(T_1, T_2, \ldots, T_N) = \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{\tau_i^{k-1}}{(k-1)!} \lambda^{k} e^{-\lambda \tau_i} \right]$$

22.11

Fonction de vraisemblance (L)

$\hookrightarrow L(T_1, T_2, \dots T_N) = \prod_{i=1}^{N} \left[\frac{T_i^{k-1}}{(k-1)!} \lambda^k e^{-\lambda T_i} \right]$.

Fonction de log-vraisemblance (LL)

$LL(T_1, T_2, \dots, T_N) = \ln [L(T_1, \dots, T_N)]$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \ln \left[\frac{T_i^{k-1}}{(k-1)!} \lambda^k e^{-\lambda T_i} \right]$.

$\Rightarrow (k-1) \sum_{i=1}^{N} \ln (T_i) - n \ln [(k-1)!] + \underbrace{nK \ln(\lambda)} - \underbrace{\lambda \times \sum_{i=1}^{n} T_i}$

Estimateur du maximum de vraisemblance

CPO : $\frac{\partial LL(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{nK}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} T_i = 0$

CSO : $\frac{\partial^2 LL(\lambda)}{\partial \lambda^2} = -\frac{nK}{\lambda^2} < 0$.

La CPO nous donne donc le maximum.

$\frac{\partial LL}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{nK}{\sum_{i=1}^{n} T_i} = \frac{K}{\bar{T}_n}$

on divise par n.

on divise par n

$= \frac{5}{0,84}$. $\bar{T}_{12} = 0,84$ (8,4 minutes).

$= 5,95$. avec, comme unité de mesure, un intervalle de 10 min.

$\lambda T \to$ C'est la durée écoulée jusqu'à la 5^e occurence.

$\hookrightarrow$ nbr moyen d'occurrence dans un intervalle de 10 min, ici, presque 6 personnes.

MÉTHODE DES MOMENTS

$\hat{\lambda}_{MM} \to$ Estimateur qui égalise les moments empirique et théorique.

MOMENT NON-CENTRÉ D'ORDRE K

$\hookrightarrow E(X^K)$

$E(X)$ est le moment non-centré d'ordre 1.

MOMENT CENTRÉ D'ORDRE K :

$\hookrightarrow E[(X - E(X))^K]$.

$V(X)$ est le moment centré d'ordre 2.

ORDRE 1 :

MOMENT THÉORIQUE : espérance mathématique.

MOMENT EMPIRIQUE : moyenne arithmétique des observations.

$$\bar{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = E(X) = \sum_{i=1}^{N} x_i \, P(X = x_i)$$ cas discret

$$\bar{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$ cas continu

ORDRE 2 :

Moment théorique non centré : espérance mathématique des carrés.

Moment empirique : moyenne arithmétique des observations au carré.

$$\overline{S_N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i^2 = E(X^2) = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \, P(X = x_i) \text{ cas discret}$$

$$\overline{S_N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i^2 = E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_i^2 \, f(x) \, dx \text{ cas continu.}$$

Exemple :

$X \sim U(0, b)$

$E(X) = \frac{b}{2}$.

Méthode des moments : ~~moyenne~~ moment théorique = ~~moyenne~~ empirique.

$$\underbrace{\boxed{\frac{\hat{b}_{MM}}{2}}}_{\text{moment théorique}} = \overbrace{\boxed{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i}}^{\text{moment}}_{\text{moment empirique}} \Rightarrow \hat{b}_{MM} = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$$

$X_i \rightarrow$ Nombre de personnes servies dans un intervalle de 10 minutes.

Échantillon : $X_1, X_2, \dots, X_{12}$

12 observations ($N = 12$).

la moyenne empirique est $6,5_{12}$
$\hookrightarrow \bar{X}_{12} = 6,5 = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} x_i$

la moyenne des carrés :
$\hookrightarrow \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} x_i^2 = 47,8$

$X_i \sim P(\lambda)$: $E(X) = \lambda = V(X)$

Premier moment empirique = Premier moment théorique
$\Rightarrow \bar{X}_n = E(X)$

$\hat{\lambda} = \bar{X}_{12} = 6,5$

SME
Second moment empirique centré :
$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \bar{X}_N)^2$$

NB/ $S_N^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \bar{X}_N)^2 \rightarrow$ estimateur sans biais de la variance.

SMT
Second moment théorique centré :
$V(X_i) = \lambda$

$$SME \rightarrow \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i^2 + \bar{X}_N^2 - 2X_i\bar{X}_N).$$
$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i^2 + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\bar{X}_N^2 - \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i\bar{X}_N$$

$$\Rightarrow \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i^2 + \bar{X}_N^2 - 2\bar{X}_N^2$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i^2 - \bar{X}_N^2 = 47{,}8 - 6{,}5^2 = 5{,}55$$

$\neq$ $V(X) = \lambda = 5{,}55$

$\hookrightarrow \hat{\lambda} = 5{,}5$

On a un $\hat{\lambda} = 5{,}5$. On peut conclure que les deux estimat° sont $\neq$.

~~On peut conclure que les deux estimations~~

13.11. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$; définition empirique de la variance

mais n'est pas un estimateur sans biais de la variance.

$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2 \rightarrow$ estimateur sans biais de la variance.

$$E(S_n^2) = E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2\right)$$

$$= E\left(\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} X_i\bar{X}_n + \sum_{i=1}^{n}\bar{X}_n^2\right)\right)$$

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i = n\bar{X}_n$$

$$E(S_n^2) = \frac{1}{n-1} E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2n\bar{X}_n^2 + \sum_{i=1}^{n}\bar{X}_n^2\right)$$

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(x_i) = n\mu$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(x_i^2) = V(x_i) + (E(x_i))^2$$

$$E(\bar{X}_n^2) = V(\bar{X}_n) + (E(\bar{X}_n))^2$$

$$E(S_n^2) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} E(x_i^2) - n E(\bar{X}_n^2)\right)$$

29.11
(rattraper)

LOI DU KHI DEUX

$(X_i)_{i \in [1, n]}$ échantillon de n VA indépendantes, de loi normale centrée réduite.

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

$Y \sim \chi^2(n)$ loi du khi deux à n degrés de liberté

quantile p d'une $\chi^2(n)$ $K(p, n)$

$$P(Y \leq K(p, n)) = p$$

$$Y \sim \chi^2(n)$$

propriétés → $\boxed{E(Y) = n}$ et $\boxed{V(Y) = 2n}$

$Y_1 \sim \chi^2(n_1)$ et $Y_2 \sim \chi^2(n_2)$

$Y_1 \perp Y_2$ (Y_1 et Y_2 indépendantes).

$$(Y_1 + Y_2) \sim \chi^2(n_1 + n_2)$$

LOI DE STUDENT À n DEGRÉS DE LIBERTÉ :

$T(n)$, $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. $Y \sim \chi^2(n)$

Les variables Z et Y sont indépendantes

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \sim T(n)$$

$T(P_n)$ le quantile d'ordre p d'une $T(n)$

$P(T \leq T(p,n)) = p$

Avec $n \to +\infty$ on a une loi normale centrée réduite $(0,1)$.

$\bar{X}_n \to$ moyenne arithmétique.

$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$; c'est un estimateur sans biais de l'espérance.

$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_n)^2$; c'est un estimateur sans biais de la variance.

THÉORÈME DE FISHER

$(X_i)_{i \in [1,n]}$ échantillon de VA indépendantes et de même loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

$\bar{X}_n$ et S_n indépendantes :

$$\frac{(n-1)\, S_n^2(X)}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$\frac{\sqrt{n}\,(\bar{X}_n - \mu)}{S_n(X)} \sim T_{n-1}$$

on prend la $\sqrt{\ }$ de S_n^2 $\rightarrow$ $= S_n$ $(\sqrt{S_n^2} = S_n)$

INTERVALLE DE CONFIANCE

de niveau $1-\alpha$ pour le paramètre θ

$\alpha \in [0,1]$

L'intervalle $[A_n, B_n]$ de longueur minimale où les bornes de cet intervalle sont des fonctions des données et telle que :

$$\boxed{P([A_n, B_n] \ni \theta) = 1-\alpha}$$

$(1-\alpha)$ -> niveau de confiance de l'intervalle.

α -> probabilité que l'intervalle de confiance ne contienne pas la vraie valeur.

(α -> seuil).

A_n et B_n sont les bornes de l'intervalle de confiance.

$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$

α_1 et α_2 mesurent le risque à gauche et à droite de dépasser un seuil plancher ou plafond.

$\boxed{\alpha_1 \neq 0}$ et $\boxed{\alpha_2 \neq 0}$ -> on a un intervalle de confiance bilatéral.

$\boxed{\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}}$ → On a un intervalle de confiance bilatéral symétrique.

INTERVALLE DE CONFIANCE UNILATÉRAL

$\boxed{\alpha_1 = \alpha \text{ et } \alpha_2 = 0} \Rightarrow IC = [A_n ; +\infty[$

On veut assurer une valeur minimale au paramètre à estimer

$\boxed{\alpha_2 = \alpha \text{ et } \alpha_1 = 0} \Rightarrow IC =]-\infty ; B_n]$

On ne veut pas dépasser un seuil maximal.

STATISTIQUE PIVOTALE

pour un paramètre θ.

C'est une statistique dont l'expression dépend de θ et dont la loi est connue et ne dépend pas de θ.

exemple

$n = 62$ → parcelles de terrain : échantillon.

Rendement moyen en hectares de 103 quintaux de maïs

écart-type de 9.

$(R_i)_{i \in [1,62]}$ observat°s de rendement iid

iid : indépendantes et identiquement distribués.

TCL : $\dfrac{\sum_{i=1}^{62} R_i - 62\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0,1)$

$\bar{R}_{62} \xrightarrow{L} \mathcal{N}(E(\bar{R}_{62}), V(\bar{R}_{62}))$

Avec $\bar{R}_{62} = \dfrac{1}{62}\sum_{i=1}^{62} R_i$

$IC_{90\%}(\mu) = [a, b]$ tq. $P([a,b] \ni \mu) = 0,9$

↳ càd 90% de chances que le vrai μ se trouve dans l'intervalle de confiance

$P\left(-z_{0,05} < \dfrac{\bar{R}_{62} - \mu}{\sqrt{V(\bar{R}_{62})}} < z_{0,95}\right)$.

L'expression dépend de μ.

TCL -> cette stats suit $\mathcal{N}(0,1)$, dont l'expression ne dépend pas de μ.

$z_{0,95}$ est le quantile d'ordre 0,95 de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

La symétrie de la loi normale, nous donne :

$$z_{0,05} = -z_{0,95}$$

$\Longleftrightarrow P(z_{0,05}\sqrt{V(\bar{R}_{62})} < \bar{R}_{62} - \mu < z_{0,95}\sqrt{V(\bar{R}_{62})})$
$= 0,9$.

$\Leftrightarrow P(\bar{R}_{62} - z_{0,95}\sqrt{V(\bar{R}_{62})} < \mu < \bar{R}_{62} + z_{0,95}\sqrt{V(\bar{R}_{62})}) = 0,9$

$IC_{90\%} = [\bar{R}_{62} \pm z_{0,95}\sqrt{V(\bar{R}_{62})}]$

$\bar{R}_{62} \pm z_{0,95}\sqrt{V(\bar{R}_{62})} = 103 \pm 1,645\sqrt{\frac{81}{62}}$

$(\sigma^2 = 81$ et $n = 62)$.

$\Leftrightarrow [101,12 \,;\, 104,88]$.

$IC_{95\%}(\mu) = [\bar{R}_{62} \pm z_{0,975}\sqrt{V(\bar{R}_{62})}]$

$\Rightarrow 103 \pm 1,96\sqrt{\frac{81}{62}} = [100,76 \,;\, 105,24]$.

interprétation : On a 95% de chances que le vrai μ soit dans l'intervalle de confiance $[100,76 \,;\, 105,24]$.

$IC_{99\%}(\mu) = [\bar{R}_{62} \pm z_{0,995}\sqrt{V(\bar{R}_{62})}]$

$\Leftrightarrow 103 \pm 2,575 \times \sqrt{\frac{81}{62}}$

$\Rightarrow [100,06 \,;\, 105,94]$. 99% de chances que le vrai μ soit dans l'intervalle de confiance : $[100,06 \,;\, 105,94]$.

C'est un cas où la variance est connue, on a utilisé la stats pivotale qui dérive du TCL.

6.12 On a σ^2 inconnu, on a cette statistique pivotale :

$$\frac{\sqrt{n}\,(R_{62}-\mu)}{\sigma}$$

À la place de σ, on a une estimation de $\sigma \Rightarrow S_n$ de σ.

On fait l'hypothèse que $S_n = 9$

Estimation pivotale : $\frac{\sqrt{n}\,(R_{62}-\mu)}{S_n}$

~ loi de Student $T(n-1)$ ~.

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{X}{n-1}}} \sim T(n-1)$$

$Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ $\quad Z \perp Y$

$Y \sim \chi^2(n-1) \Rightarrow Y = \sum X_i^2$

~ Intervalle de Confiance ~

$$IC_{1-\alpha} = R_{62} \pm t\left(1-\frac{\alpha}{2} ; n-1\right) \times \frac{S_n}{\sqrt{n}}$$

$\Rightarrow P\,[A_n ; B_n] \underbrace{\ni}_{\text{"contient"}} \theta = 1-\alpha$

On a σ^2 inconnu et estimation de l'écart-type : $S_n = 9$

$IC_{90\%} = R_{62} \pm \left[t_{0,95;61} \frac{9}{\sqrt{62}} \right]$

→ on regarde la table de la LDStudent.

$\Rightarrow 103 \pm 1{,}67 \frac{9}{\sqrt{62}} = [101{,}1 , 104 \%]$

⇒ 90% de chances que μ se trouve dans cet intervalle.

$IC_{95\%}$: on aura un intervalle plus grand

Ici $\alpha = 0{,}05$: $R_{62} \pm t(0{,}975, 61) \times \frac{9}{\sqrt{62}}$

$= 103 \pm \frac{9}{\sqrt{62}}$

$\Rightarrow [100{,}12 ; 105{,}28]$ (%).

$IC_{99\%} = \bar{R}_{62} \pm t(\underbrace{0{,}995}_{1-\frac{0{,}01}{2}}, \underbrace{61}_{\text{degré de liberté}}) \times \frac{9}{\sqrt{62}}$

$IC_{99\%} \Rightarrow 103 \pm 2{,}66 \frac{9}{\sqrt{62}}$

$= [99{,}97 ; 106{,}06]$ (%).

On passe de 62 à 8 observations donc l'intervalle de confiance par rapport à $n=62$ sera plus grand.

→

06.12 $IC_{1-\alpha} = \bar{R}_8 \pm T_{(1-\frac{\alpha}{2};\, n-1)} \times \frac{S_n}{\sqrt{n}}$

Intervalle de confiance à 90 %, 95 % et 99 % pour μ avec σ^2 inconnu, $S_n = 9$ et $n = 8$

$IC_{90\%} = \bar{R}_8 \pm T_{(0,95,7)} \frac{9}{\sqrt{8}} = 103 \pm 1,895 \frac{9}{\sqrt{8}} = [96,97 ; 109,03]$

$IC_{95\%} = \bar{R}_8 \pm T_{(0,975;7)} \frac{9}{\sqrt{8}}$

$= 103 \pm 2,365 \frac{9}{\sqrt{8}}$

$= [95,475 ; 110,125]$.

$IC_{99\%} = \bar{R}_8 \pm T_{(0,995;7)} \frac{9}{\sqrt{8}} = 103 \pm 3,499 \times \frac{9}{\sqrt{8}}$.

$= [91,87 ; 114,13]$.

L'incertitude supplémentaire diminue avec la taille de l'échantillon.

$\lim_{n \to +\infty} S_n^2 = 0$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{la personne est prête à acheter la nouvelle version} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\sim \mathcal{B}(p)$$

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

↳ Somme de n variables de Bernoulli indépendantes/identiques/distribués. (iid)

$$\cancel{n\hat{p} = \sum_{i=1}^{n} X_i}$$

$$n\hat{p} = \sum X_i \sim \mathcal{B}(n, p)$$

$$\hat{p} = \frac{\sum X_i}{n}$$

$$V(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{n} \qquad \hat{p} \sim \mathcal{N}\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

$$\hat{p} \sim \mathcal{N}\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right) \Leftrightarrow \sqrt{n} \times \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p(1-p)}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$IC_{1-\alpha} = \left[\hat{p} \pm z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

$1-\alpha = 95\%$ D'où $z_{(1-\frac{\alpha}{2})} = t_{97,5\%}$

↳ quantile d'ordre 0,975 de la loi Normale $\mathcal{N}(0,1) = 1,959$

$\Rightarrow n = 100$ et $\hat{p} = 0,52$

$IC_{0,95\%}(0,52) = \left[0,52 \pm 1,959 \frac{\sqrt{0,52 \times 0,48}}{\sqrt{100}}\right]$

$= [0,42 ; 0,62]$.

$n = 1000$ et $\hat{p} = 0,52$

$IC_{95\%} = 0,52 \pm 1,959 \frac{\sqrt{0,52 \times 0,48}}{\sqrt{1000}}$

$= [0,489 ; 0,551]$.

$n = 2000$ et $\hat{p} = 0,52$

on a :

$IC_{95\%}(0,52) = \left[0,52 \pm 1,959 \frac{\sqrt{0,52 \times 0,48}}{\sqrt{2000}}\right]$.

$\Rightarrow [0,498 ; 0,541]$.

Un intervalle change avec un $n \neq$.

Valeur de n minimale telle que la borne inférieure d'un intervalle de confiance à 95% soit supérieure à 50%.

$\hat{p} - z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}} \geq 50\%$.

$\Rightarrow \hat{p} - 0,5 \geq z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}}$

$\Leftrightarrow \sqrt{n} \geq z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\hat{p} - 0,5}$.

$$\Rightarrow n \geqslant \left(\frac{z(1-\frac{\alpha}{2})}{\hat{p}-0,5}\right)^2 \hat{p}\,(1-\hat{p})$$

$$\Rightarrow n \geqslant \left(\frac{1,959}{0,52-0,5}\right)^2 0,52 \times 0,48 \approx 2\,394,79$$

donc $n \geqslant 2\,395$

L'IC n'inclut pas la proportion 0,5.

Test d'hypothèses

↳ Procédure de décision entre deux hypothèses

H_0 → Hypothèse nulle (hypothèse que l'on souhaite tester)

H_1 → Hypothèse alternative

H_0 $\mu \geqslant \mu_0$ et H_1 $\mu < \mu_0$ (test unilatéral inférieur)

H_0 $\mu_0 \leq \mu$ et H_1 $\mu > \mu_0$ (test unilatéral supérieur)

H_0 $\mu_0 = \mu$ et H_1 $\mu \neq \mu_0$ (test bilatéral)

α → erreur de type 1 (risque de première espèce)

On peut interpréter cela comme la probabilité de rejeter à tort H_0 (ou ne pas rejeter H_1) quand H_0 est vraie.
→ Seuil de signification (ou niveau de significativité) habituellement fixé à 0,05 ou 0,01.

β → Risque de 2nde espèce (erreur de type 2). C'est la probabilité de ne pas rejeter à tort H_0 quand H_1 est vraie.
Puissance d'un test $(1-\beta)$
Probabilité de rejeter H_0 à raison.

Région de rejet : zone I_R telle que on rejette H_0 si la statistique de test est dans cette région.

Région de confiance I_C telle qu'on ne rejette pas H_0 si la statistique de test est dans I_C.

On s'intéresse à des tests d'hypothèses unilatéraux relatifs à la moyenne d'une population dans le cas

de σ connu : test unilatéral inférieur
$\to H_0 : \mu \geqslant \mu_0$ et $H_1 : \mu < \mu_0$

$$\boxed{Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}$$

test unilatéral supérieur.
$\to H_0 : \mu \leqslant \mu_0$ et $H_1 : \mu > \mu_0$

écart-type de la distribution d'échantillonage de $\bar{x}$:

$$\boxed{\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}.$$

Valeur de p :
Rejet de H_0 si $p \leqslant \alpha$ ($\to \alpha$ seuil de signification).

13.12 TEST D'HYPOTHÈSES (suite)

$\alpha \to$ seuil de signification, niveau de significativité.
Probabilité de faire une erreur de 1è espèce lorsque l'hypothèse nulle est vraie.

Probabilité de rejetter à tort l'hypothèse nulle H_0 quand H_0 est vraie

On a : Rejet de H_0 si la valeur $p \leqslant \alpha$

Approche par les valeurs critiques
Règle de rejet pour un test unilatéral inférieure :
($H_0 : \mu \geqslant \mu_0$ et $H_1 : \mu < \mu_0$)

Rejet de H_0 si $z < -z_\alpha$

$-z_\alpha$ valeur critique (valeur z qui fournit une aire α dans la queue inférieure de la distribution normale centrée réduite (à gauche de la statistique de test)).

Règle de rejet pour un test unilatéral supérieur ($H_0 : \mu \leq \mu_0$ et $H_1 : \mu > \mu_0$)

Rejet de H_0 si la valeur $z \geq z_\alpha$ (valeur critique) ($\rightarrow$ valeur de z qui fournit une aire de α dans la queue supérieure de la distribution normale centrée réduite (à droite de la statistique de test)).

Tests d'hypothèses bilatéraux
($H_0 : \mu = \mu_0$ et $H_1 : \mu \neq \mu_0$)
relatifs à la moyenne d'une population dans le cas de σ connu :

Statistique de test : $z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

$\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Rejet de H_0 si $z \geq z_{\frac{\alpha}{2}}$ ou $z \leq -z_{\frac{\alpha}{2}}$

L'intervalle de confiance pour la moyenne d'une population (coeffi-cient de confiance $(1-\alpha)$: $\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

L'hypothèse nulle dans le cas de tests d'hypothèses bilatéraux peut être rejeté si l'intervalle de confi-ance ne contient pas μ_0.

σ inconnu : Statistique de test suit une distribution de Student

$$\tau = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

s → écart-type d'échantillon comme estimation de σ.

$$s = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}}{n-1}$$

Cas où σ inconnu → on a l'approche par les valeurs p, on compare p avec le niveau de significativité α choisi. la règle de rejet ne change pas :

Rejet de H_0 si $p \leq \alpha$
(α niveau de significativité).