HERKAT Fatima

Microéconomie : Incertain et information

Partie 2 : Valeur de l'information

Cours du 7.11

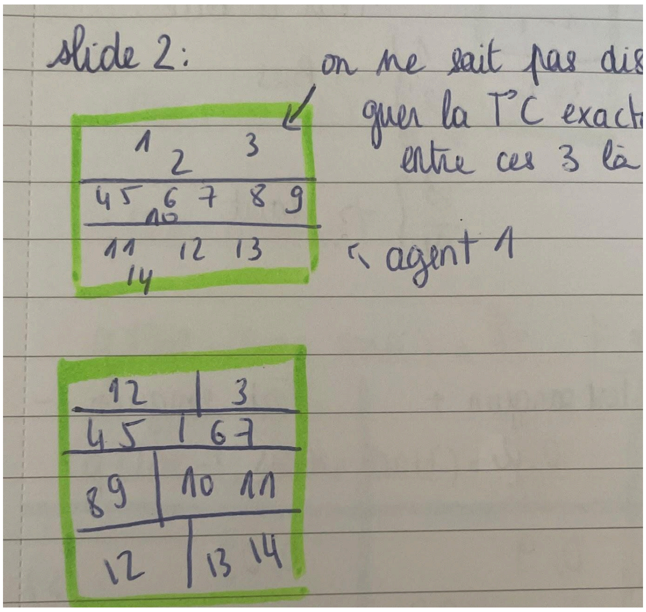
Si on a une information que ne possède pas un autre agent, par exemple si on connaît notre état de santé, on va voir une assurance afin d'obtenir une mutuelle de santé, on a une information que n'aura pas l'assurance. C'est une situation d'information asymétrique. Cela crée une asymétrie entre les agents qui va avoir des conséquences importantes.

On va parler dans ce cours (d'aujourd'hui) d'un agent individuel : comment utilise-t-il l'information pour prendre de meilleures décisions et comme l'information permet-elle d'augmenter son utilité ?

La représentation de l'information

Comment modélise-t-on l'information ? On décrit un ensemble d'états de nature.

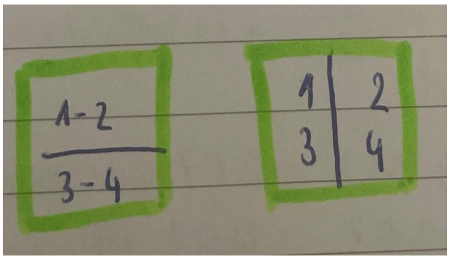
État de la nature : description complète de toutes les circonstances que l'on a dans un moment donné (exemple : la météo, on a plusieurs "états de nature", il pleut aujourd'hui ou il fait beau). Mais, on est moins capable de définir la température exacte, par exemple, si on ne sait pas distinguer des températures comprises entre 11°C et 14°C.



C'est une approche sous forme de partitions, la perception que l'on a, peut être différente selon les agents économiques.

L’agent 2 a une partition plus fine (ou l’agent 1 a une partition plus grossière). C’est une situation dans laquelle l’agent 2 est plus informé que l’agent 1. L’information de l’agent 2 est meilleure.

Il y a des situations pour lesquelles one ne peut pas comparer :



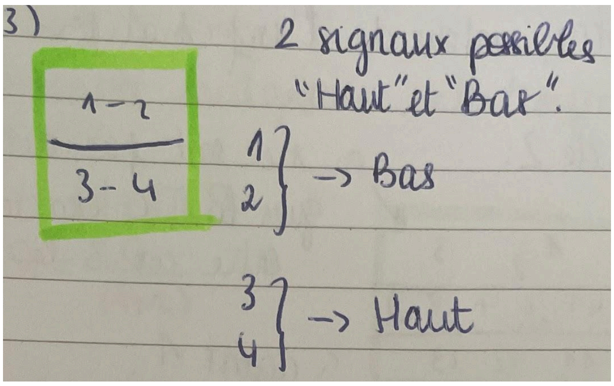
Blackwell montre que cette comparaison de partition est une bonne mesure de l'information reçue par les agents.

Pour chacun de ces états de nature, on va avoir une probabilité, distribution de probabilité sur les états de nature.

Il existe des cas plus complexes, par exemple, dans le cas d’un contrat d’achat d’une entreprise à un sous traitant qui lui produit des phares, on lui demande d'en produire un certain nbr, pour une certaine qualité, certaine date… Dans un contrat, liste exhaustive de toutes les situations qui peuvent se produire (ex : s’il ne les livre pas en temps et en heure, si c’est dû à un événement climatique, il n’aura pas de pénalité mais si c’est lié à une grève, il en va de sa responsabilité).

Il y a des difficultés dans ce type de contrat, il peut y avoir des circonstances que l’on ne prévoit pas (exemple : inondation dans l’usine). Dans la description même de tous les états de nature, se pose un problème : peut-on décrire de manière exhaustive tous les états de nature ?

Il y a une deuxième représentation : les signaux.



La perception que l'on a peut être interprété comme un signal que nous envoie l'état de la nature. En fonction de l'état de la nature, on nous envoie une information.

L'approche sous forme de partition

Chaque individu va avoir une partition sur chacun des états de la nature et si deux états appartiennent au même bloc de partition, l'individu ne peut pas les distinguer.

Cf exemples plus haut (météo)

Comparaison des partitions

Une partition Π est *plus fine* qu'une partition Π' si, quand deux états sont dans le même bloc de Π ils sont aussi dans le même bloc de Π'

Une partition Π est *plus grossière* qu'une partition Π' si, quand deux états appartiennent è des blocs différents dans Π, ils appartiennent aussi à des blocs différents dans Π'

"Plus fine" et "Plus grossière" sont des *ordres partiels* et non des *ordres complets*.

Par exemple, $\Pi_1 = \{\{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3\}\}$, $\Pi_2 = \{\{\omega_1\}, \{\omega_2, \omega_3\}\}$ ne sont pas comparables.

L'approche en termes de signaux

Chaque individu reçoit un signal corrélé à l'état de nature.

Cette approche est *équivalente* à l'approche sous forme de partition.

Ce qui compte dans un univers fini est la probabilité du signal i étant donné l'état j, p_{ij}.

Actions, états et conséquences

On définit un ensemble d'actions $X = (1, .., x, ..., X)$

Il existe un ensemble d'etats de la nature $S = (1, .., s, .., S)$ avec probabilité π_s

Il existe un ensemble de conséquences c_{xs}

L'agent choisit l'action x pour maximiser $U(x) = \sum_s \pi_s v(c_{xs})$

Si on choisit une action, elle va avoir une conséquence différente selon l'état de la nature dans lequel on est. Les conséquences dépendent de l'action ainsi que l'état de nature. Exemple : Ecq on s'opère ? Cela dépend de si on a un cancer, d'autres maladies (états de la nature)… quelle est l'utilité de nous opérer ou non ? Il y a des conséquences différentes si on nous opère ou non en fonction des états de la nature.

$v(c)$ → fonction d'utilité de Bernoulli.

Les loteries étaient des conséquences indépendantes des actions que l'on a choisies.

Ici, l'agent choisit une action en fonction de l'information dont il dispose.

Exemple : décideur politique qu'il prend en réformant le droit de l'immigration, il y a deux actions possibles :

- ne rien faire,
- réformer la loi

Ces deux actions vont avoir des conséquences différentes selon l'état de la nature.
Souvent, en politique, on choisit de ne rien faire car on ne connaît pas les conséquences de la réforme (exemple : électoralement, est-ce que c'est une bonne idée ?).

Messages, croyances

On définit *cinq* probabilités différentes:
La probabilité (non conditionnelle) de l' état s, π_s
La probabilité (non-conditionnelle) de recevoir le message m, q_m
La probabilité jointe de l' état s et du message m, j_{ms}
La probabilité conditionnelle de recevoir le message m étant donné l'état s $q_{m|s}$
La probabilité postérieure de l' état s étant donné le message m, $\pi_{s|m}$.

La probabilité (non conditionnelle) → probabilité antérieure, c'est celle que l'on au départ de chacun des états de la nature, c'est la probabilité que va choisir le décideur s'il n'a aucune information supplémentaire.

Ex : probabilité qu'il y ait du pétrole dans une certaine zone sans avoir fait des tests avant.

Ensuite, avec un test géologique, c'est la probabilité de recevoir un message.

Ex : test de présence de pétrole.

La troisième probabilité jointe est la probabilité que deux événements aient lieu en même temps.
Ex : probabilité qu'il y ait du pétrole + test positif de présence de pétrole.

slide 1

	Test sanguin +	Test sanguin -
Malade	0,02	0,05
Non-Malade	0,9	0,03

Somme = 1

0,02 + 0,05 = 0,07 (7% malade

0,9 + 0,03 = 0,93 (93% non-malade)

0,02 + 0,9 = 0,92

0,05 + 0,03 = 0,08 .

On définit ici les probabilités jointes de chacun des événements.

Ici, il y a deux messages possibles : test positif et test négatif.

La quatrième probabilité nous dit, quelle est la probabilité selon l'état de la nature, que le test soit positif ou négatif.

(2):

$$q(\text{Test}+/\text{Malade}) = \frac{0,02}{0,07} = \frac{2}{7}$$

$$q(\text{Test}-/\text{Malade}) = \frac{5}{7}$$

$$q(\text{Test}+/\text{Bonne santé}) = \frac{90}{93}$$

$$q(\text{Test}-/\text{Bonne Santé}) = \frac{3}{93}$$

Le décideur part des probabilités initiales (objectives de l'état de la nature), reçoit le message puis il calcule la probabilité postérieure de la probabilité initiale en prenant en compte le message.

3) :

$$\pi(\text{Malade}/\text{Test}+) = \frac{0,02}{0,92} = \frac{2}{92}$$

$$\pi(\text{Malade}/\text{Test}-) = \frac{0,05}{0,08} = \frac{5}{8}$$

$$\text{Prob}: \frac{7}{100} \quad \begin{cases} 2/92 \approx 2/100 \\ \frac{5}{8} \approx 60\% \end{cases}$$

Distributions jointes et postérieures

Soit $J = [j_{ms}]$ la matrice des probabilités jointes
$\sum_{s,m} j_{ms} = 1$
$\sum_m j_{ms} = \pi_s$
$\sum_s j_{ms} = q_m$
Soit $L = [q_{m|s}]$ la matrice des probabilités des messages,
avec $q_{m|s} = \frac{j_{ms}}{\pi_s}$
$\sum_m q_{m|s} = 1$
Soit $\Pi = [\pi_{s|m}]$ la matrice des probabilité postérieures ,
avec $\pi_{s|m} = \frac{j_{ms}}{q_m}$
$\sum_s \pi_{s|m} = 1$

Un exemple : l'extraction de pétrole

Il peut y avoir du pétrole dans un champ

Actions: investir ou non

Trois états de la nature: un état 1 avec une probabilité de pétrole de 90%, un état 2 avec probabilité de 30% et un état 3 avec une probabilité nulle

On peut faire une exploration test, avec deux résultats possibles: "positif" (+) et "négatif " (-)

Si l' état est 1, + apparaît avec une probabilité de 90%, si l' état est 2 + apparaît avec une probabilité de 30% et si l' état est 3 + n'apparaît jamais.

Les probabilités initiales des trois états sont: $(0.1, 0.5, 0.4)$

Voir feuille slide 9

HERKAT Fatima

slide 9 :

	Test ⊕	Test ⊖
État 1	0,9	0,1
État 2	0,3	0,7
État 3	0	1

$\pi(s) = (0{,}1 ; 0{,}5 ; 0{,}4)$

$jms = q(m/s)\,\pi(s)$

$q(m/s) = \dfrac{jms}{\pi(s)}$

	Test ⊕	Test ⊖
État 1	0,09	0,01
État 2	0,15	0,35
État 3	0	0,4

On a calculé la matrice jms
→ probas jointes.

$\pi(\text{État1}/\text{Test}+) = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$

$\pi(\text{État 2}/\text{Test}+) = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$

$\pi(\text{État 3}/\text{Test}+) = 0$

$\pi(\text{État 1}/\text{Test}-) = \frac{1}{76}$

$$\pi(\text{État } 2/\text{Test} -) = \frac{35}{76} \approx 0{,}4$$

$$\pi(\text{État } 3/\text{Test} -) = \frac{40}{76} = 0{,}6.$$

La matrice L

Etat	+	-	
1	0.9	0.1	1
2	0.3	0.7	1
3	0	1.0	1

La matrice J

Etat	+	-	
1	0.09	.01	0.1
2	0.15	0.35	0.5
3	0	0.4	0.4
q_m	0.24	0.76	1

La matrice π

Quelle est la valeur de l'investissement ? Le coût ?

Etat	+	-
1	0.375	0.013
2	0.625	0.461
3	0	0.526

Une fois que l'on a observé le test, on a des valeurs plus extrêmes.

La règle de Bayes

Première formulation: $\pi_{s|m} = \pi_s \frac{q_{m|s}}{q_m}$

Seconde formulation: $\pi_{s|m} = \pi_s \frac{q_{m|s}}{\sum_s \pi_s q_{m|s}}$.

Le jeu télévisé

Un participant à un jeu télévisé doit choisir entre trois portes cachées par des rideaux.
Derrière une des trois portes se trouve un prix d'une valeur importante.
Le participant choisit d'abord la porte 1.
Avant de soulever le rideau, le maître de cérémonie dévoile une autre porte, la porte 2, derrière laquelle il n'y a rien.

On donne au participant la possibilité de changer d'avis et de choisir la porte 3. A-t-il intérêt à le faire ?

Etat	Probabilité initiale	Message	Jointe	Postérieure
Prix dans 1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
Prix dans 2	$\frac{1}{3}$	0	0	0
Prix dans 3	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

La valeur de l'information

On cherche à calculer la valeur exacte de l'information.

Soit x_0 l'action optimale qui maximise $U(x) = \sum_s \pi_s v(c_{xs})$

Après avoir reçu le message m, le décideur révise ses croyances à $\pi_{s|m}$

Cela conduit le décideur à recalculer l'action optimale x_m

La *valeur de l'information* est

$\omega_m = U(x_m, \pi_{s|m}) - U(x_0, \pi_{s|m})$

La valeur de l'information est calculée en utilisant la probabilité postérieure ; cette valeur est toujours non-négative (le décideur peut toujours choisir x_0)

Quand on n'a pas d'information, on a un choix où le décideur choisit l'action qui maximise son espérance d'utilité. Les probabilités utilisées sont les probabilités initiales, avant d'avoir de l'information.

On peut choisir une autre action compte tenu des informations qui nous sont communiquées.

L'intérêt de l'information est important car elle nous amène à affiner notre choix et à prendre des décisions en fonction des informations que l'on reçoit.

Valeur des structures d'information

En général, on veut calculer la valeur d'une structure d'information.

Ce qui importe n'est pas ω_m mais la valeur espérée sur tous les messages m,

$$\Omega = E_m \omega_m = \sum_m q_m [U(x_m, \pi_{s|m}) - U(x_0, \pi_{s|m})],$$

Si c^*_{sm} est le résultat de la meilleure action à l'état s avec message m et c^*_{s0} le résultat de la meilleure action sous les probabilités initiales,

$$\begin{aligned} \Omega &= \sum_m q_m \sum_s \pi_{s|m} v(c^*_{sm}) - \sum_m \sum_s \pi_{s|m} q_m v(c^*_{s0}), \\ &= \sum_m \sum_s \pi_{s|m} q_m v(c^*_{sm}) - \sum_s \pi_s v(c^*_{s0}). \end{aligned}$$

L'exemple de l'extraction de pétrole

On simplifie en en retenant que deux états: + (probabililté $\pi_1 = 0.24$) et - (probabilité $\pi_2 = 0.76$)

Si on choisit l'action 1 (extraction) et que l' état est + on gagne $1,000,000\$$, si l' état est - on perd $400,000\$$.

Si on choisit 2 (pas d'extraction) on subit un coût de $50,000\$$. L'utilité est linéaire: $v(c) = c$.

Avec les probabilités initiales, l'action 1 donne un paiement de $1,000,000 * 0.24 - 400,000 * 0.76 = -64,000$

La meilleure action est l'action 2 avec un paiement de $-50,000$

Extraction de pétrole avec message

On suppose qu'on reçoit un message m provenant d'une exploration géologique

	m +	m -
s +	0.6	0.4
s -	0.2	0.8

Quelle est la valeur de l'information ? Combien-est-ce que la compagnie pétrolière serait prête à payer pour avoir les résultats de ce test ?

La matrice des postérieures est:

	m +	m -
s +	0.486	0.136
s -	0.514	0.864

Si le message est +, l' action 1 donne
$0.486 * 1,000,000 - 0.514 * 400,000 = 140,400 > -50,000$, et l'action 1 est donc la meilleure

Si le message est -, l' action 1 donne
$0.136 * 1,000,000 - 0.864 * 400,000 < -50,000$ et l'action 2 est donc la meilleure

La valeur de l'information est

$$\Omega(\mu) = 0.296 * (140,400 + 50,000) + 0.704 * 0 = 56,358.$$

	m +	m −
S+	0, 144	0,096
S-	0, 152	0,608

$\underbrace{0,144 + 0,152}$ → $= 0,296 = q(m+)$

$\underbrace{0,096 + 0,608}$ → $= 0,704 = q(m-)$

$\pi(S+) = 0,24$

$\pi(S-) = 0,76$

Valeur de l'information dans un pari

On parie sur le résultat du tirage d'une pièce de monnaie.
Le décideur pense qu'avec la même probabilité la pièce est "juste", a deux faces ou deux piles.

SI la prédiction est correcte, on gagne 30 mais si la prédiction est fausse on perd 50.
L'individu est neutre au risque : $v(c) = c$

Combien l'individu est-il prêt à payer pour observer un tirage de la pièce ?

Slide 22 :

	F	P
PF	1/2	1/2
PP	0	1
FF	1	0

$Q(m/s)$

	F	P	
PF	1/6	1/6	1/3
PP	0	1/3	1/3
FF	1/3	0	1/3
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

Jms

	F	P
PF	1/3	1/3
PP	0	2/3
FF	2/3	0

Les trois actions possibles sont : x_1 (ne pas parier), x_2 (parier face) x_3 (parier pile)

Sur la base des probabilités initiales, l'action optimale est de ne pas parier, avec un paiement de 0.

Si on observe le message face :

état	initiale	m	jointe	postérieure
deux face	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
juste	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
deux pile	$\frac{1}{3}$	0	0	0

slide 23

Sans information

$X_1 = 0$

X_2 : Parier Face : $\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2}30 - \frac{1}{2}50\right\}$

$+ \frac{1}{3}\left\{-50\right\} + \frac{1}{3}\left\{30\right\}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(30-50) = -10$

C'est un pari biaisé. La stratégie optimale est de ne pas parier.

La stratégie optimale est de parier face après avoir observé face avec un gain de $30 * (\frac{2}{3} + \frac{1}{6}) - 50 * \frac{1}{6} = 16.66$.

De même la stratégie optimal est de parier pile après avoir observé pile, et le gain espéré est donc de 16.66.

C'est la valeur de l'information et donc le prix maximal que le décideur est prêt à payer pour avoir accès au message

Si Info "Face":

$X_1 = 0$

$X_2 = \text{(Parier Face)}: \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}30 - \frac{1}{2}50\right)$

$+ \frac{2}{3} \times 30 = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right)(30) - \frac{1}{6}50$

$= \frac{5}{6} \times 30 - \frac{1}{6}50 = 16{,}66$

Comparaison des structures d'information

Une structure d'information μ est *plus informatif* qu'un service de message μ' si, étant donné π, *pour toute fonction d'utilité v*, $\Omega(\mu) > \Omega(\mu')$.

Quand est-ce qu'un service de message (ou une structure d'information) est *plus informatif* qu'un autre?

La réponse est donné par le Théorème de Blackwell (1953).

Brouillage

Une matrice L est plus informative qu'une matrice L' si il existe une matrice B (de dimension $M \times M'$) telle que

$$L' = LB,$$

B est un "brouillage" et $b_{m|m'}$ est la probabilité que, quand le message m' est reçu, il provient du message m.

Un brouillage est comme *l'ajout d'un bruit* au signal, transformant le signal de L en signal de L' qui est moins informatif.

Théorème de Blackwell: Une structure d'information L est plus informative qu'une structure d'information L' si et seulement si L est un brouillage de L'.

HERKAT Fatima

(exemple hors slide)

		S_1	S_2
Deux actions :	x_1	$+1$	-1
Deux états :	x_2	-1	$+1$

Les deux états ont des probabilités initiales différentes

$$\pi_{S_1} = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \pi_{S_2} = \frac{3}{4}$$

Sans information, on choisit S_2.

	m_1	m_2	m_3
S_1	1/4	0	3/4
S_2	0	3/4	1/4

qms

	m_1	m_2	m_3
S_1	1/16	0	3/16
S_2	0	9/16	3/16
	1/16	9/16	6/16

jms

π_{sm} :

	m_1	m_2	m_3
S_1	1	0	1/2
S_2	0	1	1/2
intérêt à choisir :	X_1	X_2	$X_1 \sim X_2$

Quand le message est m_1,
en choisissant $X_1 \longrightarrow +1$
$X_2 \longrightarrow -1$

Donc, le gain est +2

La valeur de l'information est

$$\frac{1}{16} \times 2 + \left(\frac{9}{16} + \frac{6}{16}\right) \times 0 = \frac{1}{8}.$$

⚠ partiel