Microéconomie : Incertain et information

Partie 3 : Finance

INTRODUCTION

1er actif financier principal→ **Action**.

Une action est la somme actualisée de tous les dividendes que l'on va recevoir.
C'est incertain car calculer les dividendes d'une entreprise c'est compliqué. On ne sait pas combien une entreprise va gagner dans 5 ans, 10 ans…

2è actif financier → **Obligation** = emprunt.

On prête de l'argent à une entreprise et elle nous promet de nous rembourser tous les ans un intérêt (= *coupon*). Le jour où l'obligation s'arrête, on nous rembourse le capital qu'on a émis.

Il y a des obligations émises par les entreprises mais aussi par l'État, on les appelle les **bons du trésor.** On considère que ces derniers sont les actifs financiers **les plus sûrs** car l'État ne se mettra jamais en faillite. Les obligations des entreprises sont moins sûres (les actions encore moins sûres car elles fluctuent énormément).

Même si une obligation nous donne un taux d'intérêt certain (à l'inverse de variable), il y a une **incertitude** qui porte sur **l'inflation** et donc sur la valeur réelle de l'obligation. Là encore, de façon clairement moindre, elles sont quand même incertaines (sur leur valeur).

À partir de ces actifs financiers, il existe une somme gigantesque d'actifs qui existent (*exemples : options, crédit swaps, produits dérivés créés à partir des actifs de base que sont les actions et les obligations*).

1. Choix de portefeuille

On analyse maintenant l'évaluation d'actifs financiers.

L'actif financier est décrit par un flux de paiement dans le temps.

On va regarder la théorie du portefeuille, on se pose la question : si on a le choix entre un grand nombre d'actions/d'obligations, quelle est la part que l'on va mettre pour chaque actif ?

Dans la théorie du choix de portefeuille, un individu achète en $t = 0$ des actifs financiers au paiement incertain en période $t = 1$.

Il s'agit donc d'une théorie très proche de la théorie du choix de loterie de **von Neumann Morgenstern.**

Le théorème d'espérance d'utilité indique que l'objectif du décideur financier est de maximiser son espérance d'utilité.

On va avoir une théorie proche du choix de loterie, on va avoir une succession de loteries dans le temps.

Le portefeuille financier est quelque chose de réaliste, si on va voir un banquier et que l'on veut investir de l'argent, il ne va pas nous proposer dans des actions/obligations mais plutôt dans des portefeuilles qui sont déjà constitués.

Modèle moyenne-variance

L'utilité d'un investisseur ne dépend que de deux choses :

- **moyenne**
- **variance.**

Mais cela ne dépend pas de la distribution etc…

On suppose que le décideur ne s'intéresse qu'à la moyenne et la variance du portefeuille.

Une des façons de justifier le modèle moyenne variance est de regarder un investisseur qui a une forme d'utilité de Bernoulli est linéaire-quadratique :

$$u(x) = \alpha x - \beta x^2,$$

Puisqu'alors la fonction d'utilité espérée est :

$$U(x) = \alpha\mu - \beta\mu^2 - \beta\sigma^2,$$

où μ est la moyenne et σ^2 la variance de la distribution de rendements $F(x)$.

On appelle parfois cette fonction d'utilité la fonction de Markowitz.

Pour des actifs financiers, la seule chose qui nous intéresse c'est la moyenne et la variance. Pour une action, forcément incertaine, ce qui la caractérise c'est sa moyenne et sa variance.

- **Un exemple**

On a l'idée de **corrélation** entre deux variables aléatoires, elles ont tendance, si elles ont une corrélation positive, à être élevées **au même moment** ou être **faibles** au même moment.

Exemple : *Total et Exxon, deux compagnies pétrolières, en tendance, leurs actions varient simultanément. Ce qui fait augmenter une action c'est la situation géopolitique, le prix du pétrole qui conduit à une augmentation du prix de l'essence.*

Actions corrélées négativement, quand l'une augmente, l'autre baisse.
Exemple : *Total et une compagnie de panneaux solaires, ces derniers rapportent beaucoup au moment où on vend peu de pétrole.*

Sur les marchés financiers, on a des variables latentes qui sont, la plupart du temps, dépendantes. La valeur d'une action va être fortement corrélé avec la valeur d'une autre action. C'est assez naturel car tout est corrélé avec le niveau de la croissance économique.

Dans l'espace des actions, on peut dire quelles sont les actions les proches les unes des autres (corrélation positive) et celles qui sont éloignées les unes des autres (corrélation négative).

Dans notre exemple, on a deux titres corrélés. Un agent a accès à deux titres et doit choisir quelle proportion de sa richesse investir dans chacun.

Probabilité	Titre 1	Titre 2
0.4	3%	5%
0.3	4%	4%
0.3	6%	3%

Il y a une corrélation plutôt négative. Quand le titre 1 est élevé, le titre 2 est faible et inversement.

Dans ce cas-là, on a intérêt à construire un portefeuille équilibré qui nous permet de diversifier les risques : "on ne met pas tous ses oeufs dans le même panier".

Rentabilité et variance d'un portefeuille

On considère un portefeuille composé de deux titres financiers et on en calcule l'espérance et la variance.

Proportion titre 1	100%	75%	50%	0%
$E(R)$	4.2%	4.18%	4.15%	4.1%
$var(R)$	1.733	0.5979	0.0583	0.767

Le premier portefeuille (100%), si on met que du titre 1, on a une espérance de rendement de 4,2%.

Si on met tout notre argent en titre 2 (0% de titre 1), on a une espérance de rendement de 4,1%.

L'espérance de la somme de deux variables aléatoires = somme des espérances.

$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

Mais cela ne vaut pas pour la variance :

$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\,Cov(XY)$

$Cov > 0$: les deux variables sont très fortement corrélées.

On peut voir que ces deux variables aléatoires ont une covariance négative.

La variance est beaucoup plus faible quand on diversifie notre portefeuille parfaitement (50%), cela vient du fait que les deux variables aléatoires ont une covariance négative. C'est un portefeuille pour lequel l'espérance est un peu plus basse que l'espérance 100% mais la variance est beaucoup plus faible.

Le portefeuille 50% (de titre 1) est meilleur que 0% (de titre 1) car la moyenne est plus élevée et la variance est plus faible.

Le portefeuille 50% (de titre 1) et le portefeuille 100% (de titre 1), quel est notre choix ? Tout dépend de notre aversion au risque, si est averse au risque, on préfère le portefeuille 50% car la variance est relativement plus faible. Sinon, on ne s'intéresse qu'à l'espérance et on choisit le portefeuille 100% (de titre 1).

Corrélation négative et réduction de la variance.

On peut toujours diminuer le risque d'un portefeuille en exploitant la corrélation négative entre les rendements des titres financiers.
C'est l'intérêt de la diversification.
On peut presque toujours réduire la variance en-dessous de la variance de chaque titre financier en diversifiant

$$Var(\tilde{R}_p) = (1-x)^2 var(\tilde{R}_1) + x^2 var(\tilde{R}_2) + 2x(1-x)cov(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2).$$

⇒ Voir formule de la variance :

$V(aX) \; = \; a^{\wedge 2} V(X)$

$Cov\ (aX,\ bY) \; = \; ab\ Cov(X, Y)$

Diversification

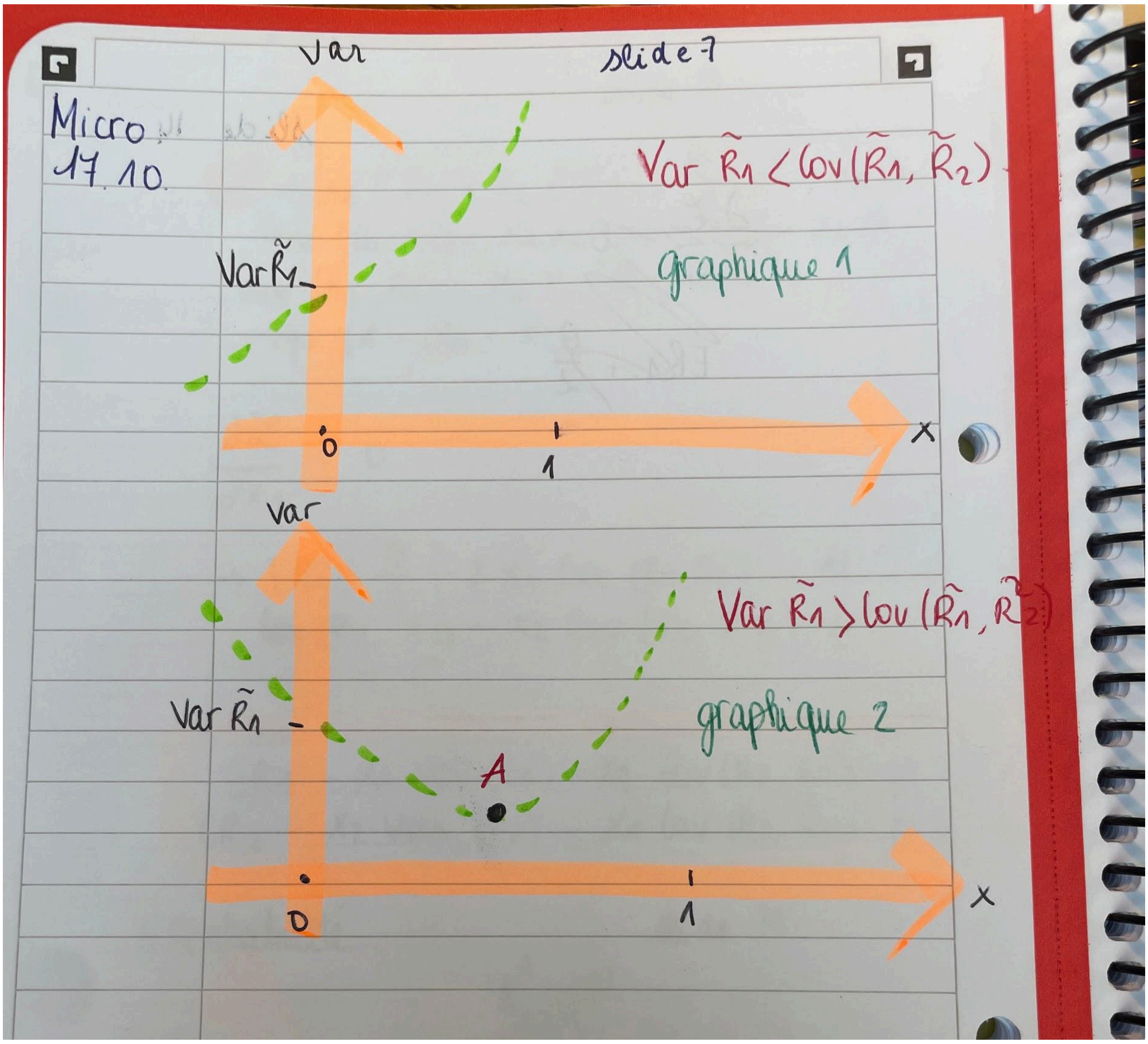
L'investisseur souhaite avoir un rendement de 10%, comment composer le portefeuille avec une variance la plus minime possible ? On cherche à déterminer x, quelle est la part que l'on met en titre x ?

La variance est une fonction quadratique de x.

Elle décroît avec la diversification si et seulement si :

$$\frac{\partial Var(\tilde{R}_p)}{\partial x} | x = 0 < 0.$$

$$Var(\tilde{R}_p) = (1-x)^2 var(\tilde{R}_1) + x^2 var(\tilde{R}_2) + 2x(1-x)cov(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2).$$



On a deux possibilités de paraboles.

Graphique 1 ⇒ pour minimiser la variance, on doit choisir $x = 0$, on a aucun intérêt à la diversification car le mieux que l'on puisse faire est de choisir une variance égale à 0.

Graphique 2 ⇒ La diversification est utile car la dérivé en point 1 est toujours positive, cela veut dire que pour minimiser la variance, on doit choisir le point strictement compris entre 0 et 1 (*voir point A*).

Le résultat (*du diapo*) nous dit que si on a une diversification (x compris entre 0 et 1), si et seulement si on est dans le cas de figure du *graphique 2*.

Graphique 1 : Variance de $R1$: titre 1 est un titre très peu volatil, variance faible. Si le titre 1 a une variance faible, en particulier plus petite que la covariance, pour minimiser la variance, on investit tout dans le titre 1.

Si on a deux titres avec une corrélation négative, alors, pour minimiser la variance, on choisira un mélange des deux titres, on choisit de diversifier. Quand la covariance est positive, on diversifie si la variance de $R1$ est très élevée.

On a:

$$\frac{\partial Var(\tilde{R}_p)}{\partial x}|x = 0 = 2[cov(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2) - var(\tilde{R}_1)],$$

si bien que la condition devient

$$cov(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2) < var(\tilde{R}_1)$$

- ou de façon équivalente:

$$\beta_{2|1} \equiv \frac{cov(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2)}{var(\tilde{R}_1)} < 1,$$

- où le *beta* mesure le ratio entre la covariance de $\tilde{R}_1$ et $\tilde{R}_2$ et la variance de $\tilde{R}_1$.

La covariance est une bonne mesure de la corrélation entre deux variables aléatoires mais pour obtenir une mesure qui soit un nombre.
Si on augmente beaucoup la variance de $R1$ ou de $R2$, on va mécaniquement beaucoup augmenter la covariance de $R1$ ou de $R2$, c'est pourquoi on la met en dénominateur. On choisit de diversifier pour minimiser la variance si la bêta est plus petite que 1.

De façon générale, quand on dérive la variance du portefeuille par rapport à x, on trouve :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial var(\tilde{R}_p)}{\partial x} &= 2(1-x)cov(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2) + 2x var(\tilde{R}_2) \\
&- 2(1-x)var(\tilde{R}_1) - 2x cov(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2), \\
&= 2cov(\tilde{R}_2, \tilde{R}_p) - 2cov(\tilde{R}_1, \tilde{R}_p) \\
&= 2var(\tilde{R}_p)(\beta_{2|p} - \beta_{1|p})
\end{aligned}$$

Augmenter la part du titre 2 réduit le risque du portefeuille si et seulement si son beta est inférieur au beta du titre 1

Les beta sont une mesure pour savoir si on a intérêt de mettre de l'argent dans tel ou tel titre.

Le choix de portefeuille

On analyse le choix d'un portefeuille de n titres avec rentabilité $\tilde{R}_i$, $i = 1, 2, .., n$
Le portefeuille s'écrit $(x_1, .., x_n)$ avec $\sum_i x_i = 1$

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_p &= \sum_i x_i \tilde{R}_i \\
E(\tilde{R}_p) &= \sum_i x_i E(\tilde{R}_i) \\
var(\tilde{R}_p) &= \sum_i \sum_j x_i x_j cov(\tilde{R}_i, \tilde{R}_j)
\end{aligned}$$

En utilisant des données historiques, on est capables de mesurer la corrélation entre tous les actifs financiers qui existent.

$xi \rightarrow$ part que l'on va mettre dans chacun des actifs financiers i.

Mon objectif va être de minimiser la variance.

Le problème de choix de portefeuille

L'investisseur choisit les parts $x1$, …, xn pour maximiser l'espérance à niveau donné de la variance.
C'est équivalent au problème de minimiser les variances à niveau donné d'espérance.

$$\begin{aligned}
&\text{Max} \quad \sum_i x_i E(\tilde{R}_i) \\
&\text{s. c.} \quad \sum_i \sum_j x_i x_j cov(\tilde{R}_i, \tilde{R}_j) = \sigma^2, \\
&\qquad\quad \sum_i x_i = 1.
\end{aligned}$$

Calcul avec le Lagrangien

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \sum_i x_i E(\tilde{R}_i) + \frac{\theta}{2}[\sigma^2 - \sum_i \sum_j x_i x_j cov(\tilde{R}_i, \tilde{R}_j)] \\
&+ \mu[1 - \sum_i x_i]
\end{aligned}$$

- En dérivant, on trouve:

slide 14 :

$$\mathcal{L} = x_1 ER_1 + x_2 ER_2 + \frac{\theta}{2}\left(\sigma^2 - x_1 x_1 \, cov(R_1, R_1) - x_1 x_2 \, cov(R_1, R_2) - x_2 x_1 \, cov(R_2, R_1) - x_2 x_2 \, cov(R_2, R_2)\right) + \mu\,(1 - x_1 - x_2).$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0$$

$$\Rightarrow ER_1 + \frac{\theta}{2}\left(-2 x_1 \, cov(R_1, R_1) - x_2 \, cov(R_1, R_2) - x_2 \, cov(R_2, R_1)\right) - \mu = 0$$

$$ER_1 - x_1 Var(R_1) - x_2 \, cov(R_1, R_2) - \mu = 0$$

$$ER_2 - x_2 Var(R_2) - x_1 \, cov(R_1, R_2) - \mu = 0$$

Solution du Lagrangien

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = E(\tilde{R}_i) - \theta \sum_j x_j cov(\tilde{R}_i, \tilde{R}_j) - \mu$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \sigma^2 - \sum_i \sum_j x_i x_j cov(\tilde{R}_i, \tilde{R}_j)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} = 1 - \sum_i x_i$$

Le choix optimal de portefeuille

Theorem

Une condition nécessaire pour un portefeuille efficient est qu'il existe deux nombres μ et θ tels que, pour tout i

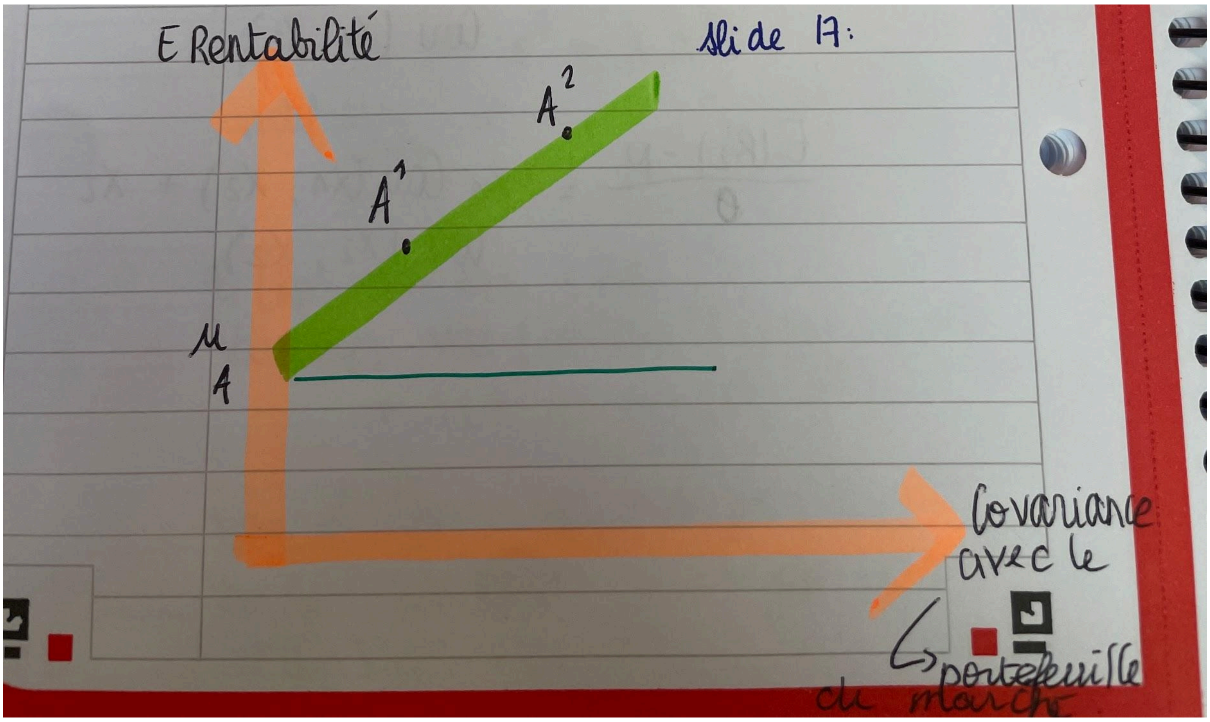
$$E(\tilde{R}_i) = \mu + \theta \sum_j x_j cov(\tilde{R}_i, \tilde{R}_j).$$

La condition nécessaire est qu'il existe une relation linéaire entre l'espérance du rendement et la covariance de ce titre avec le portefeuille.

La covariance est reliée de façon positive à l'espérance de rentabilité.

μ → taux de l'actif sans risque

θ → prix du risque



L'actif financier avec un risque élevé va avoir une covariance élevée avec le portefeuille de marché.

- Supposons que l'objectif de l'investisseur soit de maximiser une fonction moyenne-variance:

$$U = \sum_i x_i E(\tilde{R}_i) - \frac{\theta}{2} \sum_i \sum_j x_i x_j cov(\tilde{R}_i, \tilde{R}_j).$$

- sous la contrainte $\sum_i x_i = 1$

On a les mêmes équations qu'auparavant : l'espérance de rentabilité doit être une fonction linéaire de la covariance entre Ri et le portefeuille.

(1)

slide 18:

$$\mathcal{L} = \sum x_i E(R_i) - \frac{\theta}{2} \sum_i \sum_j x_i x_j \, Cov(x_i, x_j) + \mu \left(1 - \sum x_i\right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0$$

$$\boxed{\Rightarrow E(R_1) - \theta \sum_j x_j \, cov(x_i, x_j) - \mu = 0}$$

slide 19:

$$\frac{E(R_1) - \mu}{\theta} = x_1 \, Cov(x_1, x_1) + x_2 \, Cov(x_1, x_2).$$

$$\frac{E(R_2) - \mu}{\theta} = x_1 \, Cov(x_1, x_2) + x_2 \, Cov(x_2, x_2).$$

Les équations sont identiques au choix … voir diapo

On peut ré-interpréter θ comme une mesure d’aversion au risque des individus

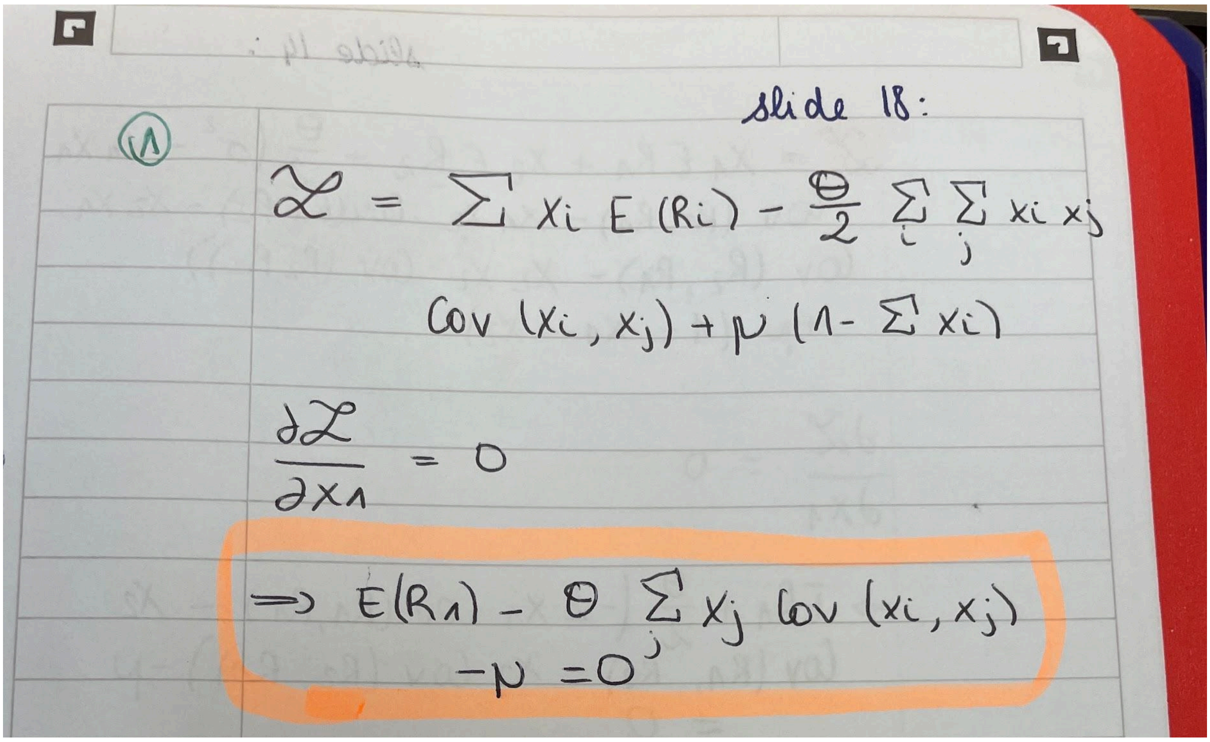
- On résoud le système d'équations linéaires:

$$E(\tilde{R}_i) = \mu + \theta \sum_j x_j cov(\tilde{R}_i, \tilde{R}_j).$$

ou

$$\sum_j x_j cov(\tilde{R}_i, \tilde{R}_j) = \frac{1}{\theta}(E(\tilde{R}_i) - \mu),$$

- pour trouver la solution $x_1, .., x_i, ..., x_n$.
- On voit que la solution $x_i(\theta)$ est linéaire en $\frac{1}{\theta}$



Ici, la variable qui apparaît est 1/θ, la solution ici : $x1$ = fonction linéaire de 1/θ

⇒ *plus θ est élevé, plus on va avoir de l'aversion au risque, plus les $x1$ seront bas.*

La covariance est une fonction quadratique de θ.

On va utiliser **θ** comme un paramètre qui va nous permettre de relier l'espérance de la rentabilité du portefeuille avec la covariance de la rentabilité du portefeuille.

slide 13

(2)

$$X_1 = \frac{\alpha\,(E(R_1 - \nu))\,cov(R_2, R_2) - \alpha\,(E(R_2) - \nu))\,cov(R_1, R_2)}{Cov(X_1, X_1)\,cov(R_2, R_2) - (cov(R_1, R_2))^2}.$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha\,(E(R_1) - \nu)\,cov(R_2, R_2) - (E(R_2) - \nu)\,cov(R_1, R_2)).}{Cov(X, X)\,cov(X_2\,X_2) - cov(X_1, X_2)^2}$$

$$X_1 = \alpha\,f(R_1, R_2)$$

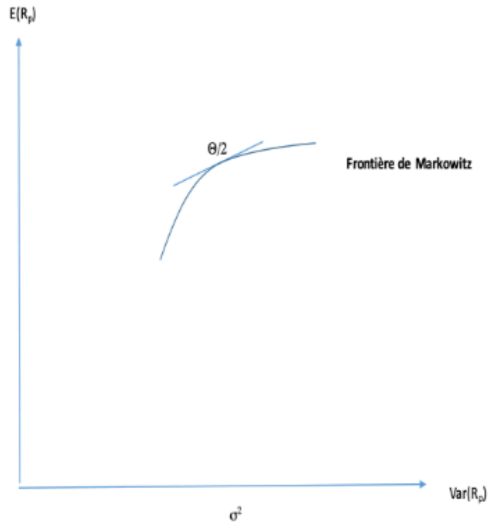
$$X_2 = \alpha\,g(R_1, R_2).$$

Quand je calcule l'espérance de rentabilité, cela me donne : alpha multiplié par un terme alors que la variance prend en compte alpha^2, on va trouver une relation entre l'espérance et la variance mais une relation non linéaire car l'un est le carré alors que l'autre non.

La frontière de Markowitz

- Etant donnée la solution $x_i(\theta)$, on calcule
- La rentabilité espérée du portefeuille est $\sum_i x_i(\theta)E(\tilde{R}_i)$,
- La variance $\sigma^2(\theta) = \sum_i \sum_j x_i(\theta)x_j(\theta)cov(\tilde{R}_i, \tilde{R}_j)$.
- Pour chaque valuer de θ, on trouve une unique valeur de rentabilité et de variance.
- On peut donc tracer une relation entre $E(\tilde{R}_p)$ et $var(\tilde{R}_p)$
- C'est la *frontière de Markowitz*, qui est croissant et concave.

Relation entre l'espérance et la variance du portefeuille de marché.



On a une fonction croissante et concave, c'est lié au fait qu'on a la fonction quadratique de α.
Les points sur cette fonction correspondent à tous les portefeuilles de marché, pour différentes valeurs de sigma^2, quelle est la valeur de l’espérance de rendement que je peux obtenir à l’optimum. Je fixe une variance à chaque fois et la frontière de Markowitz me dit pour chacune des variance, quel est le niveau d'espérance de rendement que je peux espérer obtenir. Ou inversement, pour chacun des rendements que j'ai, quelle est la variance minimale que je peux obtenir.
Plus la variance est élevée, plus l’espérance est grande.

Cela nous permet de voir où l'investisseur va choisir un point sur la frontière de Markowitz, c’est le point tangent. Avecθ faible, on va être probablement très loin de la frontière de Markowitz. On va choisir un point qui correspond à une variance très grande, ce qui est normal car si θ est faible, on a très peu d’aversion au risque (point plus à droite) et inversement.

Le théorème de séparation de Black (voir slide)

Pour toute valeur de θ, on peut calculer le portefeuille efficient.

Comme les portefeuilles sont linéaires en 1/θ, il suffit de trouver deux portefeuilles efficients x et y, et tous les autres portefeuilles efficients pourront s’écrire comme une combinaison convexe

$$\lambda x + (1 - \lambda) y$$.

Par exemple, on choisira les deux portefeuilles efficients correspondant à $1/\theta \; = \; 1$ et $1/\theta \; = \; 0$.

Ce théorème nous dit que l’on n'a pas besoin de regarder tous les portefeuilles qui existent. on doit prendre deux portefeuilles efficients, ils sont suffisants pour pouvoir engendrer tous les portefeuilles qui vont être utilisés.

Le théorème de Black suggère que si on veut construire un portefeuille, on n’a pas besoin de beaucoup de portefeuilles différents, on en a besoin que de deux.

Le théorème de Tobin

On peut choisir ces deux portefeuilles et ils vont être d’une part un portefeuille de marché (correspond à un portefeuille qui comprend toutes les actions offertes sur la bourse), efficient et l’autre actif financier qu’on utilise c'est un actif financier qui est l’actif sans risque (propriété que la variance est nulle, son espérance de rendement est faible).

Dans la réalité, c’est un bon du trésor, un emprunt de l’État à une maturité assez longue (10 ans par exemple). Le taux d'intérêt de ce bon est une mesure assez proche du taux d’intérêt de l’actif sans risque.

On regarde un choix de portefeuille avec seulement deux actifs financiers :

- actif de marché
- actif sans risque.

Un cas particulier du théorème de séparation de Black quand il existe un actif sans risque de rendement r.

Pour tout portefeuille formé d’un actif risqué et de l’actif sans risque, il existe une relation linéaire entre l'espérance et l’écart type.

$$\begin{aligned} E(R_p) &= (1-\lambda) r + \lambda R, \\ \sigma(R_p) &= \lambda \sigma(R). \\ E(R_p) &= r + (R - r) \frac{\sigma(R_p)}{\sigma(R)}. \end{aligned}$$

Slide 23 :

① $\lambda \in (0,1)$: part de l'actif risqué

$R_p = (1-\lambda)\, X^S + \lambda\, X^R$

actif sans risque ; actif Risqué.

$E(R_p) : (1-\lambda) r + \lambda R$

$Var(R_p) : Var\left((1-\lambda) X^S\right) + Var(\lambda X^R) + \lambda(1-\lambda)\, Cov(X^S, X^R)$.

$Var\, X^S = 0$; $Cov(X^S, X^R) = 0$

$Var\, R_p = Var(\lambda X^R) = \lambda^2\, Var(X^R)$

$\sigma(R_p) = \sigma\ Var\ (R)$.

La différence entre le théorème de Tobin et la frontière de Markowitz, ici, le paramètre est un paramètre linéaire. Avec Markowitz, le problème c'est que comme on regarde la variance, on a une relation quadratique (croissante et concave) et non linéaire.

② Slide 23

$$\lambda = \frac{\sigma(R_p)}{\sigma(R)}$$

$$E(R_p) = \left(1 - \frac{\sigma(R_p)}{\sigma(R)}\right) r + \frac{\sigma(R_p)}{\sigma(R)} R$$

$$E(R_p) = r + \frac{\sigma(R_p)}{\sigma(R)} (R - r).$$

Cette équation nous donne une relation entre l'espérance de rentabilité du portefeuille et l'écart type du portefeuille. Plus l'écart type est élevé, plus l'espérance est élevée.

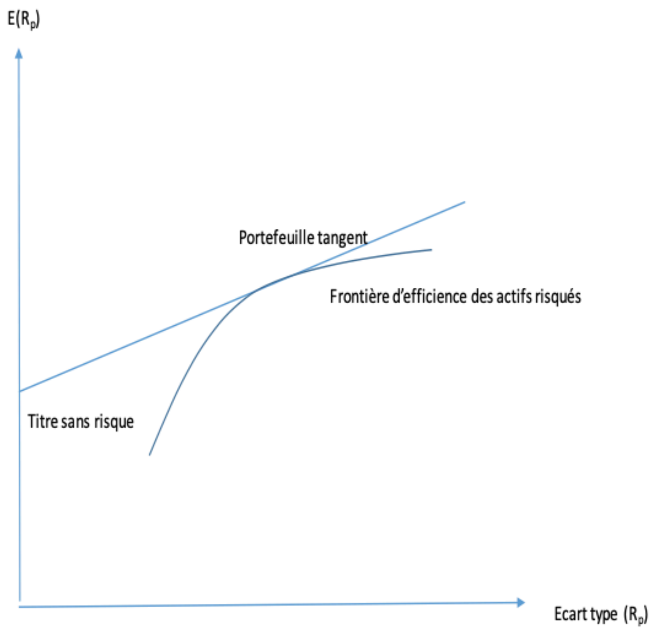
On trace la frontière d'efficience en n'utilisant que des actifs risqués : on obtient alors une hyperbole.

On combine ensuite l'actif sans risque avec la combinaison d'actifs risqués pour obtenir la droite la plus élevée possible.

Cette droite est tangente à la frontière d'efficience.

Cette droite s'appelle la capital market Line.

La Capital Market Line



Interprétation du graphique :

Quand l'écart type vaut 0, l'espérance de rentabilité correspond à l'actif sans risque (taux r).

Au fur et à mesure que l'écart type augmente, la rentabilité de marché augmente : la droite nous décrit des portefeuilles efficients, qui minimisent la variance pour un niveau de rendement donné ou maximisent le rendement pour un niveau de variance donné. Tous les portefeuilles que l'on a choisis doivent se trouver sur la droite d'efficience. Un portefeuille en dessous de la droite a un écart type trop élevé par rapport au rendement que l'on peut trouver. Il existe un autre portefeuille qui, pour la même variance, nous donne une espérance de rendement plus grande (point sur la droite). Tout ce qui est au-dessus de la droite correspond à des combinaisons de variance et d'espérance qui sont trop favorables pour l'investisseur, n'existent pas sur le marché en réalité.

Quel est le point sur la droite qui est choisi par l'investisseur ? Cela dépend de la fonction d'utilité de l'investisseur et notamment de ses courbes d'indifférence.

Les courbes d'indifférence sont **croissantes**, ou compenser une augmentation de la variance, il faut augmenter l'espérance de rendement. Elles sont de plus en plus élevées quand on augmente l'espérance de rendement et quand on baisse l'écart type (se déplacent vers le haut). Le point choisi doit rester en dessous ou sur la droite de marché : **c'est le portefeuille tangent.**

On a deux actifs, chacun des investisseurs choisit un point qui correspond à une combinaison entre ces deux actifs. Le point dépend des propriétés du consommateur , de son degré d'aversion au risque et de la droite CML.

Avec une **aversion au risque** très élevée, notre fonction va pratiquement mettre tout le poids sur la **variance**, on choisit le point le plus à gauche et inversement.

Chacun des points du segment peut être choisi par un investisseur en fonction de son **aversion au risque**.

Pourquoi "droite de marché" ? Parce que chacun des actifs financiers échangés sur le marché doit se trouver quelque part sur la droite, et en particulier, c'est ce qui nous permet de trouver une relation entre l'écart type et l'espérance de tous les actifs qui se trouvent sur le marché.

Deux actifs financiers $R1$ et $R2$ doivent tous les deux être sur la droite de marché.

slide 25

Deux actifs financiers R_1 et R_2 doivent tous les deux être sur la droite de marché.

$$E(R_2) = r + \frac{\sigma(R_2)}{\sigma(R_1)}\left(E(R_1) - r\right).$$

$$\frac{E(R_2) - r}{E(R_1) - r} = \frac{\sigma(R_2)}{\sigma(R_1)}.$$

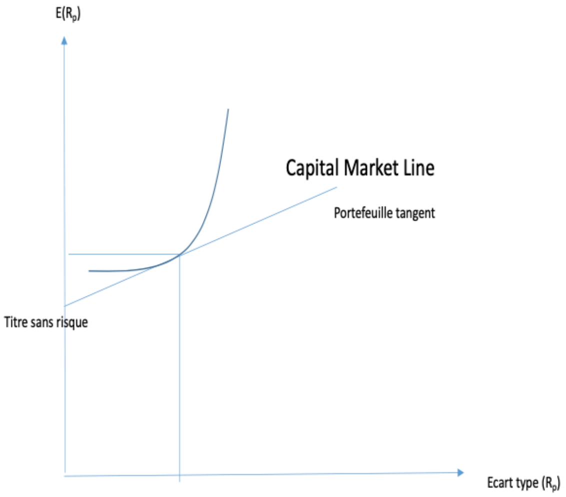
Le théorème de Tobin

Tous les portefeuilles efficients sont des combinaisons de l'actif sans risque et du portefeuille tangent.
On en déduit la relation :

$$E(\tilde{R}_i) = r + \theta \sum_{j=1}^{n-1} x_j cov(\tilde{R}_i, \tilde{R}_j).$$

Choix de portefeuille dans le modèle de Tobin

La CML décrit l'ensemble des portefeuilles efficients.
L'investisseur choisit sur la CML son portefeuille préféré : celui qui maximise sa fonction d'utilité.



Équilibre dans le modèle de Tobin

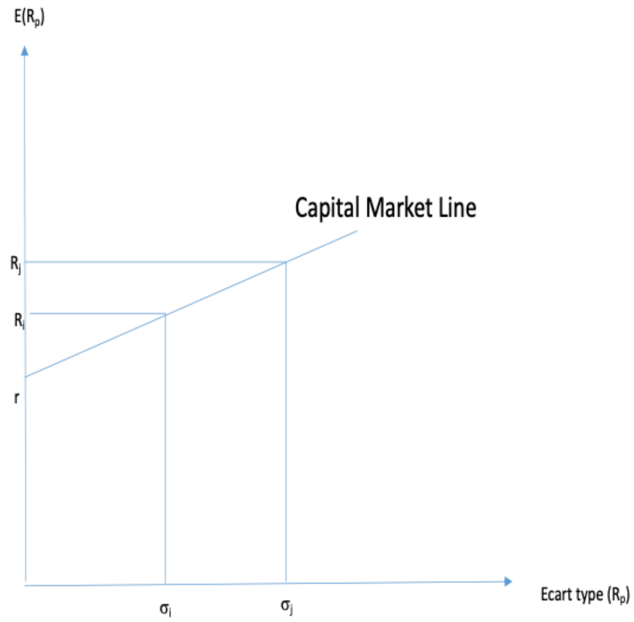
Au choix optimal de portefeuille, on a donc

$$MRS = \frac{R_p - r}{\sigma_p}.$$

A l'équilibre, si un actif *i* a un prix positif, il doit être échangé sur le marché et satisfaire:

$$MRS = \frac{R_i - r}{\sigma_i}.$$

Tous les actifs doivent donc à l'équilibre se trouver sur la CML.



C’est une formule qu’on peut estimer à partir des données qui existent. On a plus ou moins un nuage de points qui correspond à tous les actifs financiers présents sur un marché.

Le MEDAF

Le Modèle d’Évaluation Des Actifs financiers (MEDAF) ou “capital Asset Pricing Model” (CAPM en anglais).
Ce modèle d'équilibre des marchés financiers développé par Sharpe, Treynor et Lintner dans les années 1960.

L’objectif est de regarder quel est le prix d’échange.

On va définir **le portefeuille de marché.**

Un portefeuille de marché est un portefeuille qui a la même composition en valeur que le marché.

On met tous les actifs financiers qui sont échangés, il faut savoir quelle est la proportion et cette proportion doit refléter le marché.

Si la firme A représente 3% de la capitalisation totale du marché, elle sera représentée pour 3% dans le portefeuille de marché.

Le portefeuille de marché est une variable aléatoire avec des rendements aléatoires au cours du temps.

On dénote le portefeuille de marché par

$$\tilde{R}_m.$$

On sait que toute combinaison de portefeuilles efficients est efficiente.

Tous les portefeuilles détenus par les investisseurs sont efficients.

À l'équilibre, le portefeuille de marché est efficient, car il est la combinaison des portefeuilles efficients détenus par les investisseurs.

Theorem

A l'équilibre du marché, il existe deux nombres θ et μ tels que

$$E(\tilde{R}_i) = \mu + \theta cov(\tilde{R}_i, \tilde{R}_m) \text{ pour tout } i\,.$$

C'est la formule du MEDAF car on peut l'interpréter comme une relation entre la covariance Ri et de Rm et l'espérance de Ri. On peut l'appliquer.

Le portefeuille de marché est une combinaison de tous les portefeuilles efficients choisis par tous les investisseurs.

Chaque investisseur choisit un portefeuille, si on fait la somme de tous les portefeuilles choisis, on trouve le portefeuille de marché.

$$Cov(R_i, R_p + R_p') = Cov(R_i, R_p) + Cov(R_i, R_p').$$

Le portefeuille choisi par chaque investisseur individuel n'est pas observable, mais, la somme de tous les portefeuilles, donc ce qu'on voit sur le marché, est observable. Ce sont toutes des variables qu'un statisticien peut observer.

On peut tester empiriquement cette relation.

Si on a une covariance très élevée, on a un actif très proche du marché, il va relativement peu nous servir d'assurance, il n'y a pas assez de diversification par rapport au marché. Si ces actifs ont une covariance élevée, alors on va demander un rendement élevé pour pouvoir l'échanger.

Interprétation du MEDAF

On a donc une relation linéaire entre la rentabilité d'un titre et sa covariance avec le portefeuille de marché.

Plus un titre est risqué, plus sa rentabilité doit être élevée.

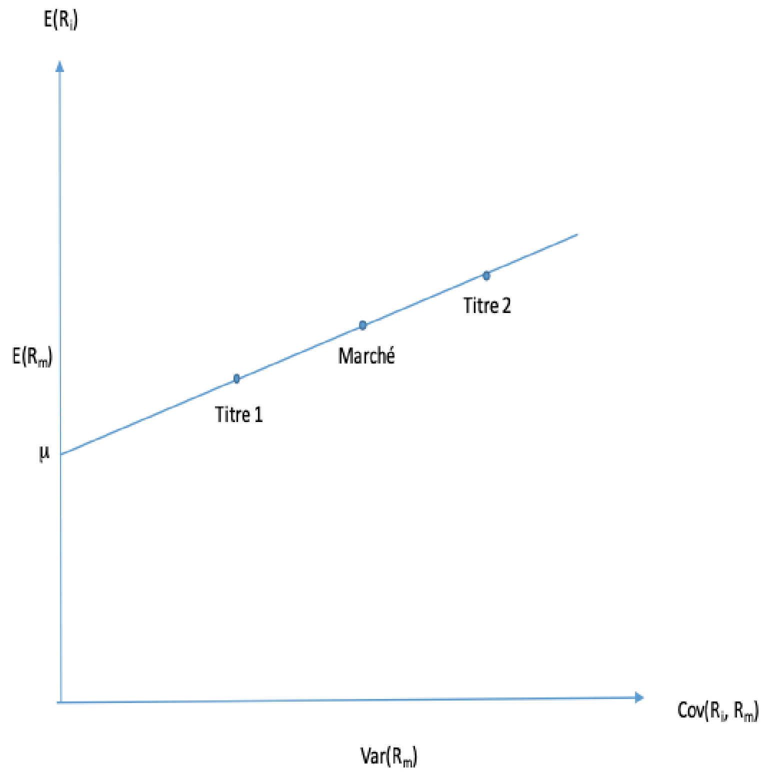
La relation est maintenant entre le titre i et le portefeuille de marché (une donnée objective) et non plus le portefeuille optimal de l'investisseur (une variable endogène).

Le MEDAF est un modèle d'évaluation des actifs financiers.

Rm n'est plus une variable de choix d'un investisseur mais quelque chose qu'on observe comme étant le résultat du marché.

La formule peut être testée empiriquement en utilisant uniquement des variables objectives c'est-à-dire la rentabilité du marché que l'on peut calculer si on a toutes les données de la Bourse de Paris la rentabilité de chacun des actifs financiers échangés sur la Bourse de Paris.

Le MEDAF et la droite de marché



Ce qu'on met sur l'axe des abscisses c'est pas la variance mais la covariance entre le portefeuille de marché et la rentabilité d'un actif financier.

Titre 2 ⟶ ça veut aussi dire qu'il a une covariance avec le portefeuille de marché qui est très élevée, le portefeuille de marché aura donc beaucoup de ce titre là car il a une espérance de rentabilité élevée.

Pour qu'un titre soit échangé sur le marché quand sa rentabilité est faible, il faut que la covariance avec le portefeuille de marché soit faible (*cf titre 1*).

Si on a une corrélation négative entre un titre et le marché qui se comporte de façon très différente avec la Bourse de Paris, on va l'échanger avec une espérance de rendement élevé. C'est un titre que l'on va pouvoir mettre dans notre portefeuille car il a une corrélation négative avec le reste du portefeuille. Si un titre est fortement corrélé avec le marché,on demande une espérance de rendement très élevée et inversement.

Mesure du risque et coefficient beta

On suppose un actif sans risque avec rendement r

On a alors $r = \mu$ et en utilisant le point de marché

$$\theta = \frac{E(\tilde{R}_m) - r}{var(\tilde{R}_m)}$$

En substituant, on trouve la forme suivante du **MEDAF** :

$$E(\tilde{R}_i) = r + [E(\tilde{R}_m) - r]\beta_i.$$

où on rappelle $\beta_i = \frac{cov(\tilde{R}_i, \tilde{R}_m)}{var(\tilde{R}_m)}$.

<u>Formule à apprendre !!</u>

$(r, 0)$: actif sans risque

$(E(\tilde{r}m), Var(\tilde{r}m))$: portefeuille de marché

$E(\tilde{r}m) = r + \theta \, Var(\tilde{R}m)$

$$\theta = \frac{E(\tilde{r}m) - r}{Var(\tilde{R}m)}$$

Le β (beta) d'une action est la covariance de cette action avec le rendement de marché divisé par $Var\ (Rm)$. C'est la formule du MEDAF.
L'espérance d'un actif financier s'écrit en fonction du βi. Savoir si l'actif financier rapporte plus ou moins que le marché va dépendre de savoir si βi est plus grand ou plus petit que 1.
Dans le cas ou βi > 1 ⇒ l'actif financier va avoir une rentabilité plus élevée que le marché mais il doit forcément avoir un βi plus élevé.

La performance des gestionnaires de portefeuille

On a vu comment constituer un portefeuille mais ***pourquoi certains sont-ils meilleurs que d'autres ? On va avoir un gestionnaire qui va nous offrir/proposer une rentabilité plus élevée. Comment peut-on évaluer la compétence d'un gestionnaire ? Quelle est la bonne mesure ?***

On cherche à estimer la performance d'un gestionnaire de portefeuille.
On appelle Rp le portefeuille choisi par le gestionnaire

Selon le MEDAF :

$$E(\tilde{R}_p - r) = \beta_p(E(\tilde{R}_m) - r)$$

L'α de Jensen

Une des façons de le faire est de faire une estimation empirique.

On estime la relation :

$$R_{p,t} - r_t = \hat{\alpha}_p + \hat{\beta}_p(R_{m,t} - R_t) + \epsilon_{o,t}.$$

C'est une formule où le portefeuille du gestionnaire est simplement proportionnel avec le portefeuille de marché. Si la relation du MEDAF est vraie, on doit avoir :

$$E(\hat{\alpha}_p) = 0.$$

Si l'égalité n'est pas vérifiée, le gestionnaire a soit fait mieux ou moins bien que le MEDAF.

Si l'estimation donne $E(\hat{\alpha}_p) > 0$, le portefeuille p est efficient mais pas le portefeuille de marché.

On peut donc mesurer la performance du gestionnaire de portefeuille en estimant $\hat{\alpha}_p$.

C'est l' α de Jensen.

$\alpha \Rightarrow$ mesure de la qualité, de la performance d'un gestionnaire de portefeuille.

Si $\alpha > 0$, le portefeuille est bien et inversement.

Le ratio de Sharpe

Une autre mesure de performance est le ratio de Sharpe :

$$\frac{E(\tilde{R}_p) - r}{\sqrt{var(\tilde{R}_p)}}.$$

Il mesure la pente de la droite reliant le portefeuille à l'actif sans risque.

Plus il est élevé, plus le gestionnaire est bon.

Le ratio de Sharpe permet de classer les fonds d'investissement.

Ce n'est pas uniquement des gestionnaires de portefeuille que l'on place mais aussi des portefeuilles de type SICAV (fonds d'investissements qui comportent plusieurs types d'actions différents).

Tests empiriques du MEDAF

La plupart des travaux épiques aboutissent à l'idée que l'on n'a pas de droite, on a du mal à placer tous les actifs financiers sur une droite.

Fama Mac Beth (1973) proposent un premier test sur plusieurs centaines de titres du NYSE.

Gibbons, Ross et Schanken (1989) utilisent le ratio de Sharpe pour tester si le portefeuille de marché est efficient.

La littérature empirique plus récente utilise des modèles auto-régressifs pour traiter la dépendance temporelle.

Ce modèle est fondamentalement fondé sur le choix de portefeuille, c'est un modèle qui n'est pas assez riche pour capturer le comportement des investisseurs. Une grosse partie de la finance a cherché à enrichir le modèle pour tenir des comptes des préférences pour le présent, des choix intertemporels, pour obtenir des modèles qui se rapprochent plus de la réalité.

Critiques du MEDAF

Il existe de nombreuses critiques du MEDAF.

La détermination du portefeuille de marché est difficile (actifs cachés comme l’or, obligations internes d’entreprises). Le portefeuille de marché n’est pas égal aux indices boursiers (Roll, 1977).

Les rentabilités boursières ne sont pas distribuées de façon indépendante et donc les investisseurs utilisent l'information passée pour prédire les rentabilités futures (Hansen Richard, 1987).

Ce modèle est un modèle trop simple pour nous donner l'évolution du prix des actions.