Microéconomie : Incertain et information

Partie 2 : Le risque

Prime de risque

- Comparaison des loteries

On mesure le risque de 4 façons différentes.

En univers certain, on peut toujours classer les richesses w et w'.

En univers incertain, la question est plus difficile.

On a des difficultés quand on a des loteries, quand est-ce que je peux dire que de façon univoque, tous les décideurs préfèreront la loterie L à la loterie L'. Quel est l'ordre dans l'espace des loteries qui permettra de dire que tous les décideurs préfèrent celle-ci à celle- ci ?

Peut-on ordonner ?

Quand on a des richesses ou des paniers de conso, on peut les classer.

En univers incertain, c'est beaucoup moins clair.

Par exemple, supposons qu'on ait trois loteries :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= (w; 1) \\
\mathcal{L}' &= (w - x, w + x; 0.5, 0.5) \\
\mathcal{L}'' &= (w - 2x, w + 3x; 0.6, 0.4).
\end{aligned}$$

L'espérance de chacune des loteries est la même (w).

Peut-on les comparer ? Peut-on en préférer une à une autre ?

- Dominance stochastique d'ordre 1

La loterie L domine stochastiquement à l'ordre 1 la loterie L' si tous les décideurs qui ont une fonction d'utilité monotone préfèrent L à L'.

- Loteries finies et continues

Quand on a un nombre **fini** de résultats $x_1, ..., x_M$, la loterie $\mathcal{L}$ est une loterie **finie** caractérisée par des probabilités $p_1, ..., p_M$

Quand l'ensemble de résultats X est **continu** (par exemple un intervalle dans $\Re$), la loterie $\mathcal{L}$ est caractérisée par une distribution de probabilité continue avec

- Une fonction de répartition $F(x) = \Pr[X \leq x]$
- Une fonction de densité $f(x) = F'(x)$

La distribution $F(\cdot)$ domine stochastiquement au premier ordre la distribution $G(\cdot)$ si et seulement si pour toute fonction croissante $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\int u(x)dF(x) \geq \int u(x)dG(x). \tag{1}$$

- Caractérisation de la dominance stochastique

Theorem

La variable aléatoire X domine stochastiquement au premier ordre la variable aléatoire Y si et seulement si $\Pr(X \leq x) \leq \Pr(Y \leq x)$ *pour tout x.*

La fonction de répartition de X doit être partout plus petite que la fonction de répartition de Y.

Avec une variable finie :

1) $x_1 \leq x_2 \leq x_3$

p_1, p_2, p_3

q_1, q_2, q_3

P domine q si : $p_1 \leq q_1$

$p_1 + p_2 \leq q_1 + q_2$

$p_1 + p_2 + p_3 = q_1 + q_2 + q_3$

$(=1)$

P domine Q → Il faut que la distribution P mette plus de poids (masse de probas) sur des valeurs plus grandes. Elle met moins de masse de probabilités sur des valeurs plus petites.

La probabilité que la variable prenne une valeur x1 ou x2 est plus petite avec P qu'avec Q.

La distribution P domine stochastiquement la distribution Q.

Avec la deuxième et troisième ligne, on en déduit que P3 > Q3.

On ne peut pas toujours classer des VAR en utilisant la dominance stochastique.

X1 = 0 X2 = 1 X3 = 2

0,1	0,5	0,4
0,2	0,6	0,2

P (1ère ligne) domine stochastiquement Q (2ème ligne) :

0,1 < 0,2

0,1 + 0,5 (=0,6) < 0,2 + 0,6 (=0,8)

X1 = 0 X2 = 1 X3 = 2

0,1	0,6	0,3
0,2	0,55	0,25

La proba de X2 est plus élevée avec P qu'avec Q. On a quand même une dominance stochastique car :

0,1 < 0,2

0,1 + 0,6 < 0,2 + 0,55

P2 > Q2, on peut se dire que P met plus de poids pour la valeur 2 que Q. Comme X2 est une valeur faible, on aurait pu en déduire que Q domine stochastiquement.
Or, on doit faire attention aux sommes en prenant en compte X1. On ne compare pas P1 avec Q1, P2 avec Q2 et P3 avec Q3 mais des sommes.

X1 = 0 X2 = 1 X3 = 2

0,1	0,6	0,3
0,2	0,4	0,4

P1 < Q1 (0,1 < 0,6)

P1 + P2 > Q1 + Q2 (0,7 > 0,6)

On en conclut que l'on n'a pas de dominance stochastique.

La loterie P domine stochastiquement Q si et seulement si pour toute fonction d'utilité croissante, le décideur (ayant une utilité monotone croissante) préfère la loterie P à la loterie Q.

X1 = 0 X2 = 1 X3 = 2

0,1	0,3	0,6
0,2	0,4	0,4

P domine Q

sous la loterie P : 0,1u(0) + 0,3 (1) + 0,6u(2) > 0,2u(0) + 0,4u(1) + 0,4u(2)

u(0) < u(1) < u(2) ⟶ u est croissante.

0,6 u(2) = 0,4u(2) + 0,2u(2) > 0,4 u(2) + 0,2 u(1)

0,1 u(0) + 0,3u(1) + 0,6u(2) > 0,1u(0)+ 0,3u(1) + 0,4u(2) = 0,1 u(0) + 0,5u(1) + 0,4u(2).
On a aussi 0,5 u(1) > 0,4 u(1) + 0,1u(0) > 0,1 u(0) + 0,1 u(0) + 0,4 u(1) + 0,4 u(2).

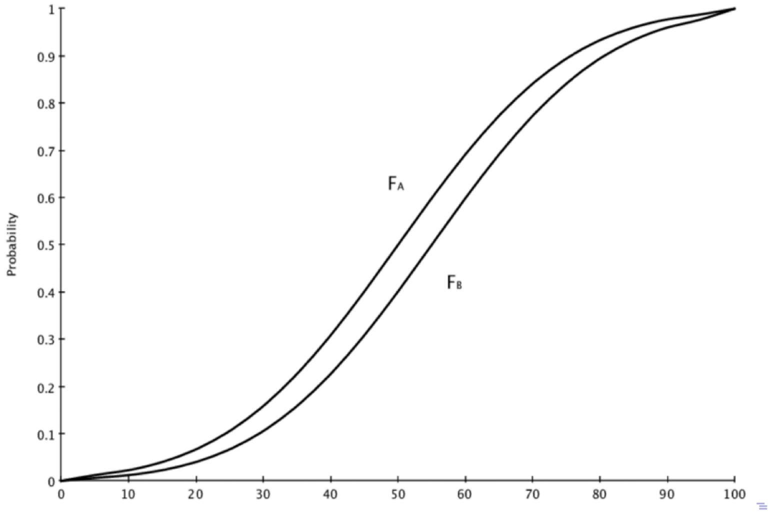
Si on a une dominance stochastique, quand on a une fonction d'utilité croissante, le décideur choisira la loterie dominante.

- Dominance stochastique pour les loteries continues

Soient deux loteries continues avec des fonctions de répartition $F(\cdot)$ et $G(\cdot)$

La loterie F domine stochastiquement au premier ordre la loterie G si et seulement si

$$F(x) \leq G(x) \text{ pour tout } x \in X.$$



On a, sur ce graphique, les fonctions de répartition des loteries A et B. Quelque soit la valeur de B, la fonction $F(B)$ est plus petite que $F(A)$. C'est elle qui domine, qui est meilleure car si elle met moins de poids pour des valeurs plus petites que 50, elle met plus de poids pour des valeurs plus grandes que 50.

La fonction de répartition sous B doit être partout plus petite que la fonction de répartition sous A. La fonction B domine stochastiquement à l'ordre 1.

Cette notion de dominance stochastique est importante dans un contexte de décisions des individus économiques.

- Équivalent certain

L'équivalent certain d'une loterie c'est l'idée selon laquelle, au lieu de participer à une loterie où il y a du risque, on nous donne un montant certain et on va accepter ce montant plutôt que de faire face au risque.

On peut choisir le montant monétaire certain qui le rend indifférent entre choisir cet univers certain ou participer à la loterie risquée.

L'individu est indifférent entre obtenir ce montant monétaire avec certitude auquel cas il obtient w* ou participer à la loterie qui dépend de l'espérance.

Pour deux loteries différentes, des niveaux de richesse différente et des utilités différentes, le montant certain ne sera pas le même.

Une fonction d'utilité concave signifie que l'individu aura de l'aversion au risque.

L'équivalent certain w^* de la loterie $\mathcal{L}$ est la richesse qui rend le décideur indifférent entre participer à la loterie et recevoir le paiement w^* avec certitude:

$$Eu(\mathcal{L}) = u(w^*).$$

Si un individu a une utilité $u(w) = \sqrt{w}$, une richesse $\omega = 200$ et fait face à une loterie $\mathcal{L} = (-50, 100; 0.4, 0.6)$, on calcule

$$u(w^*) = \sqrt{w^*} = 0.4\sqrt{200 - 50} + 0.6\sqrt{200 + 100},$$

ce qui donne $w^* = 233.82$

L'équivalent certain dépend des préférences u, de la loterie $\mathcal{L}$ et du niveau de richesse certaine ω.

Si on a un niveau de richesse de 200, si on participe à une loterie, on va avoir une loterie qui nous affecte mais nous donne des niveaux de richesse différents, ce ne sera pas la même chose si on part de 0.

On doit d'abord calculer l'espérance de l'utilité de la loterie, on obtient, avec proba 0,4, l'individu va perdre 50. S'il perd 50, son niveau de richesse final sera de 150 (200-50).

Avec proba de 60%, l'individu gagne 100, on passe à racine carré de 300.

Eu (L) = 15,29

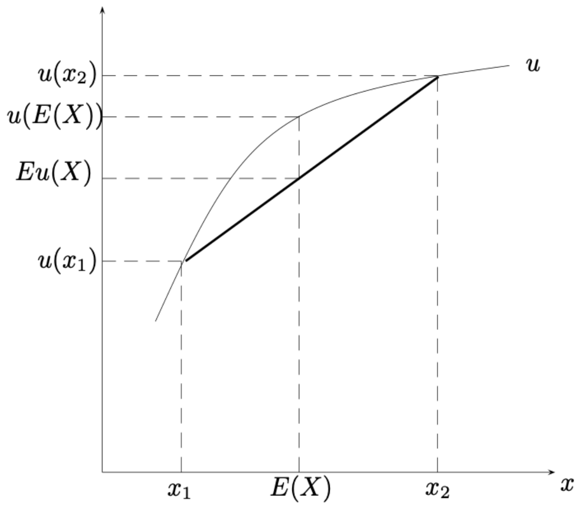
NB/ 15,29 n'est pas l'équivalent certain. L'espérance d'utilité de la loterie est u(w*). 15,29 c'est l'utilité de w*. Pour obtenir l'équivalent certain, on doit prendre le carré

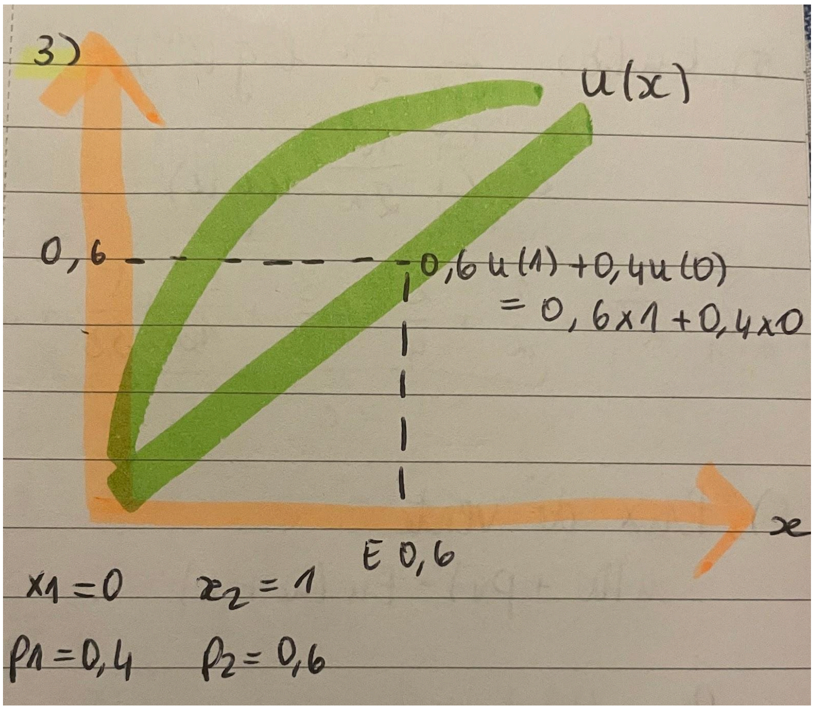
$$u(w^*) = \sqrt{w^*} = Eu(\mathcal{L}) = 15{,}29$$
$$w^* = (15{,}29)^2 = 233{,}78.$$

w* doit être de l'ordre des montants monétaires, donc w* = 15,29 insensé.

L'espérance de richesse est de 240. w* est plus petit car on a de l'aversion au risque.

Equivalent Certain pour un individu risquophobe





Quel est le montant qui va me rendre indifférent sur la courbe d'utilité ?

Quelle est la valeur de w* telle que u(w*) = 0,6 ? On doit voir l'antécédent.

Avec des fonctions concaves, on trouvera toujours que l'équivalent certain se trouvera à gauche de l'espérance de la loterie.

- Prix de vente

Le prix de vente p_v d'une loterie $\mathcal{L}$ (partie aléatoire de la richesse) est le prix minimal auquel le décideur est prêt à vendre cette partie aléatoire.

En vendant la partie aléatoire au prix p_v, le décideur obtient $\omega + p_v$; en participant à la loterie il reçoit $Eu(\mathcal{L})$, on a donc:

$$u(\omega + p_v) = Eu(\mathcal{L}) = u(w^*),$$

Donc

$$p_v = w^* - \omega.$$

Le prix de vente est la différence entre l'équivalent certain et la partie certaine de la richesse.

Dans l'exemple, $w^* = 233.82, \omega = 200$ donc $p_v = 33.82$.

33,82 : différence entre la richesse initiale et l'équivalent certain. montant que l'on réclame à un autre consommateur pour lui donner le choix de cette loterie.

prix auquel on est prêt à vendre la partie aléatoire de notre revenu. Il dépend de la richesse.

Si on a une richesse de 100, l'équivalent certain sera différent, de même pour le prix de vente :

Le prix de vente dépend de la richesse et des préférences.

- Avec $\omega = 100$ on a $w^* = 128$ donc $p_v = 28$
- Avec $u(w) = w^2$, on a $w^* = 251$ et donc $p_v = 51$.

NB/ prix d'achat : Si on a cette loterie, avec un certain niveau de richesse, quel est le montant que je suis prêt à payer pour participer à cette loterie ? C'est ce prix d'achat.

il est plus concret de comparer les prix de vente plutôt que les équivalents certains. Quand on a un niveau de richesse plus bas, notre prix de vente est plus bas.

On remplace la loterie de l'exemple par $\mathcal{L} = (50, -100; 0.4, 0.6)$.

L'équivalent certain est $w^* = 152$ et le prix de vente $p_v = -48$

Comme la loterie conduit à une perte (comme dans le cas de l'assurance), le décideur est prêt à payer pour se débarrasser du risque..

Le prix de vente peut être positif ou négatif

Prix de vente négatif si on a une loterie avec une espérance négative.

Aléa positif : on achète du loto.

Aléa négatif : maison brûle, on ne voulait pas de l'aléa, on est prêt à s'en débarrasser, prix de vente négatif car on est prêt à payer pour s'en débarrasser.
On en déduit que, contrairement à l'équivalent certain qui est toujours positif, le prix de vente peut être négatif.

- La prime de risque

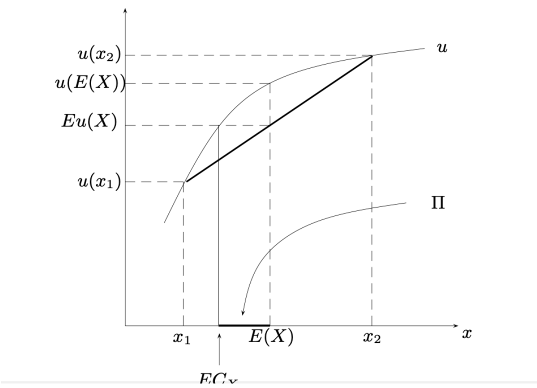
La prime de risque attachée à la loterie L est la différence entre l'espérance de la loterie et l'équivalent certain :

$$\pi = E(\mathcal{L}) - w^*.$$

Dans l'exemple, $E(\mathcal{L}) = 240$, $w^* = 233.82$ donc $\pi = 6.18$
On peut de façon équivalente définir la prime de risque par:

$$u(E(\mathcal{L}) - \pi) = Eu(\mathcal{L}).$$

Prime de risque pour un individu risquophobe



Longueur du segment → prime de risque (espérance - équivalent certain).

- Le paradoxe de Saint Pétersbourg (rappel)

On tire une pièce de monnaie non truquée.
Le joueur gagne la première fois que la pièce tombe sur pile. Le paiement qu'il reçoit est 2 si la pièce tombe sur pile la première fois, 4 si elle tombe sur pile au second essai, 8 au troisième essai, etc…

Combien êtes **vous** prêt à payer?
La plupart des décideurs répondent qu'ils sont prêts à payer entre 5 et 20
Pourtant l'espérance de la loterie est infinie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty.$$

Pour expliquer cela il faut introduire la notion d'attitude vis à vis du risque.

5) $Eu(\mathcal{L}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \log(2^n)$

$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2n} \log(2).$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32}}_{= e} + \dots$$

- Aversion au risque

Un individu est *averse au risque (riscophobe)* si il préfère l'espérance d'une loterie à la loterie:

$$u(E\mathcal{L}) > Eu(\mathcal{L}).$$

Dans le paradoxe de Saint Petersbourg, les individus ont de l'aversion au risque..

On préfère obtenir avec certitude l'équivalent certain que de participer.

- Neutralité par rapport au risque

Un individu est *neutre par rapport au risque* si il est indifférent entre l'espérance d'une loterie et la loterie:

$$u(E\mathcal{L}) = Eu(\mathcal{L}).$$

Même chose de recevoir avec certitude l'espérance de la loterie ou de participer à la loterie.

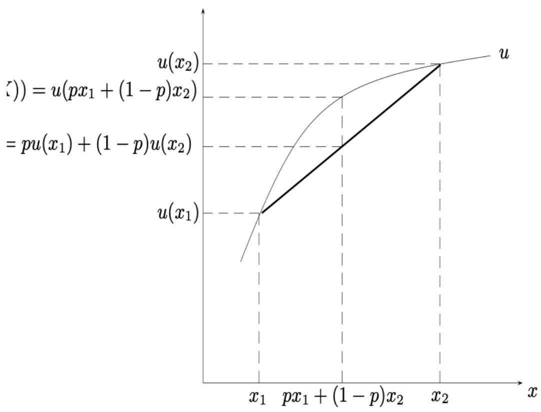
- Goût pour le risque

Un individu a du *goût pour le risque (riscophile)* si il préfère jouer à la loterie que l'espérance de la loterie.

$$u(E\mathcal{L}) < Eu(\mathcal{L}).$$

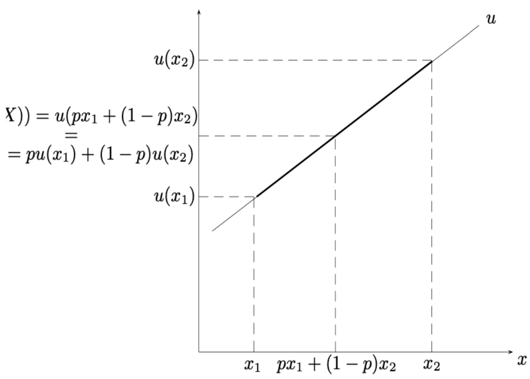
On préfère jouer à la loterie que l'espérance de la loterie. L'utilité d'espérance de la loterie est plus petite que l'espérance de la loterie.

- Individu riscophobe



$X = [(p, 1-p), (x_1, x_2)]$ et $u(x)$ concave

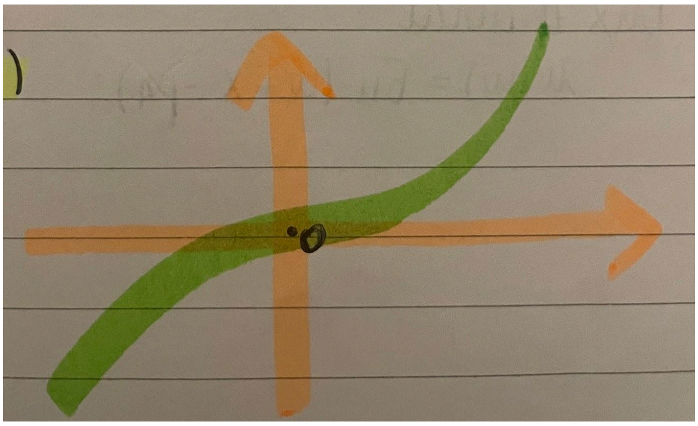
- Individu neutre au risque



$X = [(p, 1-p), (x_1, x_2)]$ et $u(x)$ linéaire

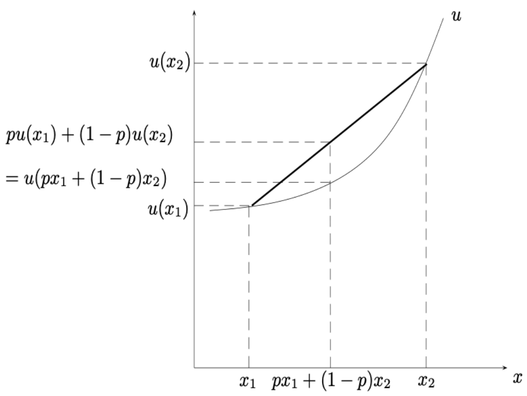
Paradoxe Friedman, les individus s'assurent (aversion au risque) mais ils sont aussi prêts à jouer aux loteries (jeux d'argent), dans lesquelles on est sûrs de perdre. L'espérance de gain est toujours négative.

Résolution de ce paradoxe : l’individu se comporte différemment lorsqu’il fait des pertes et lorsqu’il fait des gains.



Si j’ai un niveau de revenu bas, j’aurais tendance à faire des pertes et inversement. Fonction concave puis convexe. On traite différemment les pertes et les gains, asymétrie à partir d’un point de différence, entre gains et pertes.

- Individu riscophile



$X = [(p, 1-p), (x_1, x_2)]$ et $u(x)$ convexe

- Équivalent certain et aversion au risque

Si le décideur est averse au risque : $w^* < E(\mathcal{L})$
(l’équivalent certain est inférieur à l’espérance de la loterie)
Si le décideur est neutre au risque: $w^* = E(\mathcal{L})$
(l’équivalent certain est égal à l’espérance de la loterie)
Si le décideur au du goût pour le risque : $w^* > E(\mathcal{L})$
(l’équivalent certain est inférieur à l’espérance de la loterie)

- Prime de risque et aversion au risque

Si le décideur est averse au risque : $w^* < E(\mathcal{L})$ et donc $\pi > 0$ (la prime de risque est positive)
Si le décideur est neutre au risque: $w^* = E(\mathcal{L})$ et donc $\pi = 0$ (la prime de risque est nulle)
Si le décideur au du goût pour le risque : $w^* > E(\mathcal{L})$ et donc $\pi < 0$ (la prime de risque est négative)

- L'inégalité de Jensen

(**version finie**) Soit u une fonction concave. Alors, pour tout $(x_1, ..., x_n)$ et $(p_1, ..., p_n)$,

$$\sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i) \leq u(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i).$$

(**version continue**) Soit u une fonction concave. Alors

$$\int u(x)dFx \leq u(\int xdFx).$$

- Concavité, convexité et attitudes par rapport au risque

Le décideur est averse au risque si et seulement si la fonction d'utilité de Bernoulli u est concave.

Le décideur est neutre au risque si et seulement si la fonction d'utilité de Bernoulli u est affine.

Le décideur a du goût pour le risque si et seulement si la fonction d'utilité de Bernoulli u est convexe.

- Attitudes vis-à-vis du risque

Aversion	Neutralité	Goût
$w^* < E(\mathcal{L})$	$w^* = E(\mathcal{L})$	$w^* > E(\mathcal{L})$
$\pi > 0$	$\pi = 0$	$\pi < 0$
u concave	u affine	u convexe
$u'' < 0$	$u'' = 0$	$u'' > 0$

- Chômage et salaire

Un salarié fait face à un risque de chômage.

Avec probabilité p, il perd son emploi et touche une indemnité de chômage c

Avec probabilité $1 - p$, il garde son emploi et touche un salaire $w > c$.

On a donc

$$U(\mathcal{L}) = pu(c) + (1 - p)u(w).$$

Crainte du chômage: $\frac{\partial U}{\partial p} = u(c) - u(w) < 0$ car $c < w$

Si $u(x) = \ln x$, $p = 10\%$, $w = 2000$, $c = 1000$ on trouve

$$w^* = 1866.$$

Le salarié est prêt à accepter une baisse de salaire de 134 Euros pour éviter le risque de chômage.

Si le salarié est neutre au risque, on calcule $w^* = 1900$, il accepte une baisse de salaire de 100 Euros

Si le salarié a du goût pour le risque ($u(w) = w^2$), on a $w^* = 1924$. Il n'accepte une baisse de salaire que de 76 Euros!

- Épargne de précaution

On considère deux périodes:

- Revenu certain y_1 en période 1
- Revenu aléatoire en période 2: $(\underline{y_2}, \overline{y_2}; p, 1-p)$

Le consommateur peut épargner en période 1 à un taux i.
On a donc un profil de consommation (c_1, c_2) aléatoire :

$$((c_1, (y_1 - c_1)(1+i) + \underline{y_2}), (c_1, (y_1 - c_1)(1+i) + \overline{y_2}); p, 1-p).$$

Le consommateur choisit c_1 pour maximiser

$$u(c_1) + pu(\underline{c_2}) + (1-p)u(\overline{c_2}).$$

Le problème est analysé dans le TD3
Choisir c_1 pour maximiser

$$u(c_1) + pu((y_1 - c_1)(1+i) + \underline{y_2}) + (1-p)u((y_1 - c_1)(1+i) + \overline{y_2}).$$

La condition de second ordre donne:

$$u''(c_1) + pu''(\underline{c_2})(1+i)^2 + (1-p)u''(\overline{c_2})(1+i)^2 \leq 0.$$

Il faut donc $u'' < 0$: le consommateur doit être averse au risque pour choisir d'épargner
On trouve aussi $\frac{dc_1^*}{dp} < 0$: le consommateur épargne plus si la crainte de chômage est plus forte.

- Incertitude et épargne

Dans un autre exercice du TD3, on suppose que le revenu $y_2 = 0$ est certain, mais le taux d'intérêt I est aléatoire.
On suppose une fonction d'utilité $u(c) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}$
On montre que l'épargne est plus faible quand le taux d'intérêt est incertain que quand il est certain égal à $E(I)$

- Prime de risque et prime d'assurance

Un individu a une richesse certaine $\omega = 100$ et une maison de valeur $I = 900$.

Avec probabilité $p = 0.01$, la maison est détruite.

La loterie est donc donnée par $\mathcal{L} = (100, 1000; 0.01, 0.99)$.

Avec une fonction d'utilité $u(w) = \ln w$, on calcule l'équivalent certain:

$$\ln w^* = 0.01 \ln 100 + 0.99 \ln 1000,$$

Soit $w^* = 977$ et $\pi = 991 - 977 = 14$.

Comment le propriétaire peut-il se débarrasser du risque ?

- En vendant la maison: $\ln(\omega + p_v) = E(\mathcal{L})$ donnant un prix de vente $p_v = 877$
- En souscrivant une assurance en choisissant une indemnité $i = I$. La prime d'assurance maximale $\overline{b}$ est telle que

$$\ln(\omega + I - \overline{b}) = E\mathcal{L}.$$

ou $\overline{b} = 1000 - 977 = 23$

(La prime de risque (14) et la prime d'assurance (23) sont différentes!)

On a

$$\omega + I - \overline{b} = w^*$$

et

$$\pi = E(\mathcal{L}) - w^* = \omega + I(1 - p) - w^*.$$

On en déduit

$$b^* = Ip + \pi$$

La prime d'assurance est la valeur espérée de l'indeminité (Ip) plus la prime de risque.

- Prix d'achat

On a une richesse omega et une partie de notre revenu est aléatoire (l'autre est fixe).
quel est le montant maximum que l'on est prêt à payer pour avoir notre revenu aléatoire ?

Définition symétrique de celle du prix de vente
A quel prix un individu de richesse initiale ω est-il prêt à payer pour acquérir un revenu aléatoire X?
On calcule p_A comme solution à

$$u(\omega) = EU(\omega + X - p_a).$$

Le prix d'achat n'est pas égal au prix de vente.
Dans l'exemple où $\omega = 200$, $u(w) = \sqrt{w}$ et $\mathcal{L} = (-50, 100; 0.4, 0.6)$ on calcule

$$\sqrt{200} = 0.4\sqrt{200 - p_a - 50} + 0.6\sqrt{200 - p_a + 100},$$

$p_a = 32.68 \neq p_v = 33.82$
La différence s'explique par le fait que les richesses initiales sont différentes..

Mr X envisage d'acheter une voiture

Il a une richesse initiale ω, la voiture coûte p et rapporte $2000q$, où q est un indice de qualité

En univers certain, Mr X est prêt à acheter la voiture si $p \leq 2000q$.

On suppose que la qualité n'est pas observable, et est donnée par une variable aléatoire Q.
Si Mr X est neutre au risque, il achète la voiture si

$$E(\omega + 2000Q - p) \geq E(\omega),$$

soit

$$p \leq 2000E(Q).$$

Supposons maintenant qu'il ait une aversion pour le risque. Alors il achète la voiture si

$$Eu(\omega + 2000Q - p) \geq Eu(\omega).$$

En remplaçant

$$Eu(\omega + 2000Q - p) = u(E(\omega + 2000Q - p) - \pi)$$
$$u(E(\omega + 2000Q - p) - \pi) \geq u(\omega),$$

d'où

$$\omega + 2000EQ - p - \pi \geq \omega,$$

et

$$2000EQ - \pi \geq p.$$

Le prix d'achat est donc $p_a = 2000EQ - \pi$.

En général, $p_a = E(X) - \pi$ tout comme $p_v = E(X) - \pi$ (mais avec différentes valeurs de la prime de risque..)

Distinction prix d'achat/de vente :

Prix de vente :

$$u(w + p_V) = Eu(w + X).$$

Prix d'achat :

$$u(w) = Eu(w + X - p_A).$$

prix d'achat → montant que l'on est prêt à payer pour obtenir une valeur risquée. Tient compte du fait qu'on a une richesse initiale (notée omega).

Le calcul de ce prix (d'achat) est quelque chose qui a une valeur qui dépend uniquement de la loterie et indépendamment de la richesse que l'on a. Ça ne tient pas compte du fait que l'on soit pauvre ou riche mais la mesure du prix d'achat dépend de notre niveau de richesse. La même voiture, si on est riche/pauvre, on est prêt à la payer à un prix différent car la prime de risque pi dépend de notre niveau de richesse.

La prime de risque n'est pa calculée sur la même base quand on calcule le prix d'achat (à partir une situation omega à ce qu'on a quand on prend le risque et qu'on a la loterie et le prix de vente (on part de la situation où on a la loterie et on calcule l'espérance d'utilité quand on se débarrasse du risque).

Être capable de calculer l'équivalent certain, la prime de risque, l'espérance.

Mesures de risque

INTRODUCTION

Deux questions qu'on va se poser :

- Savoir est-ce qu'on peut, quand on a différents décideurs, caractériser qui sont ceux qui ont le plus d'aversion au risque.

On va introduire une mesure d'utilité d'aversion au risque. Pourquoi ? C'est fondamental pour comprendre comment on peut partager des revenus aléatoires. Exemple : on a une entreprise et un travailleur, l'entreprise assure le travailleur en lui donnant un salaire fixe, on peut le faire car on a deux individus qui ont des niveaux d'aversion au risque différent. Le travailleur ayant plus d'aversion au risque est prêt à accepter une baisse de salaire pour éviter d'être confronté à un risque. Autre exemple, au sein d'une même famille, un champ peut avoir été mangé par les insectes alors que l'autre ne l'est pas, certains vont devoir faire des transferts à d'autres (à ceux qui n'ont pas de bonnes récoltes). On doit comprendre qui a de l'aversion au risque dans le village. Les plus riches ont souvent une aversion au risque plus faible, ce sont donc eux qui font des transferts d'argent (parfois à des taux très élevés), transferts de la part des plus riches qui utilisent parfois des méthodes violentes pour être remboursés. On a clairement des différences d'aversion au risque qui dépendent du niveau de revenu (relation décroissante entre niveau de richesse et aversion au risque). Cette idée de l'assurance c'est pas uniquement des assurances type AXA/MAID qui permettent de nous assurer mais on vit dans un monde d'assurance continuelle, des individus se prêtent de l'argent (notamment à l'intérieur des familles). On analyse au sein des familles les transferts d'argent sous forme d'aversion au risque, l'idéal, le moins d'aversion au risque transfèrent de l'argent et inversement.

- Deuxième partie du cours, on cherchera à mesurer le risque contenu dans une loterie.

La mesure de risque la plus naturelle (variance) n'est pas celle qui est utilisée habituellement pour caractériser le risque que l'on a dans une loterie. On va mesurer le risque par une mesure particulière. Mesure de risque différente de la variance.

- Mesures d'aversion au risque

on va essayer de classer les individus par rapport au risque.

On a une loterie L, deux individus A et B.

On veut savoir quand peut-on dire que l'individu A a plus d'aversion au risque que l'individu B ?

Si la prime de risque π^A est plus élevée que la prime de risque π^B

Réponse quasi immédiate : on peut voir dans l'équivalent certain, si on le prend, on enlève l'espérance, on a une mesure indépendante du type de loterie qu'on a, on a une prime de risque. Pour une même loterie, l'individu A a plus d'aversion au risque si l'équivalent certain est plus faible que pour l'individu B.

La prime de risque π dépend

- des préférences du décideur
- de la partie risquée de la richesse
- de la partie certaine de la richesse ω

C'est la première mesure. Problème → il est possible que le même individu, pour deux loteries différentes, la prime de risque se calcule mais elle dépend de l'utilité, de la loterie et du niveau de richesse. On peut avoir deux individus A et B dans deux situations différentes, les primes de risque sont classées différemment.

Si la prime de risque est plus élevée pour A que pour B, alors A a plus d'aversion au risque que B.

L'individu A a une aversion au risque plus grande que B si pour toutes les loteries et pour toutes les richesses, A a une prime de risque toujours plus élevée que B.

- Transformations concaves de la fonction d'utilité

La fonction u est "plus concave" que la fonction w si il existe une fonction f telle que

- f est strictement croissante, $f' > 0$
- f est strictement concave, $f'' < 0$

et

$$u(w) = f(v(w)).$$

$u(w) = \log w$

et $v(w) = \sqrt{w}$

$\log(w) = (\log(\sqrt{w}))^2$

$f(x) = \log x^2$ ← est-elle croissante et concave ?

$f'(x) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x} > 0$ croissante

$f''(x) = -\frac{2}{x^2} < 0$ concave.

La fonction logarithme est plus concave que la fonction racine carrée. Si on a deux décideurs, avec un décideur qui a une fonction d'utilité logarithmique et l'autre racine carré, celui qui a l'aversion au risque la plus élevée est celui qui la fonction logarithme (plus concave que la fonction carrée).

- Transformation concave et prime de risque

On suppose que u est une transformation concave de v

$u(E(W) - \pi^A) = E(u(W)) = E(f(v(W))$

Par l'inégalité de Jensen,

$$E(f(v(W)) < f(E(v(W)) = f(v(E(w)) - \pi^B) = u(E(W) - \pi^B).$$

On en déduit que

$$\pi^A > \pi^B.$$

L'individu qui a une fonction d'utilité plus concave aura aussi une prime de risque plus élevée.

Si on prend une fonction f concave et qu'on calcule l'espérance de f(x) :

Inégalité de Jensen

Pour toute fonction concave, pour toute variable aléatoire,

$E\, f(x) \leq f\, E(x)$

$E\, v(w) = v(x)$

$x = Ew - \pi$

$E\, v(w) = f(v\,(Ew - \pi^B))$

- Exemples de transformation concave

$u(w) = \ln w$, $v(w) = \sqrt{w}$

transformation $f(x) = \ln(x^2)$ est une fonction concave.

$u(w) = w^\alpha$, $v(w) = w^\beta$ avec $0 < \alpha < \beta \leq 1$

transformation $f(x) = x^{\frac{\alpha}{\beta}}$ est une fonction concave.

$$u(w) = w^{1/3}$$
$$v(w) = w^{1/2}$$

$$u(w) = v(w)^{2/3}$$
$$w^{1/3} = (w^{1/2})^{1/3}$$

$$f(x) = x^{2/3}$$
$$f'(x) = \frac{2}{3} x^{-1/3}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{9} x^{-4/3} \quad < 0$$

- Mesure de risque d'Arrow-Pratt

Cette mesure date de 1963-1964, mesure pour chaque individu de son aversion au risque en termes de la fonction d'utilité de l'individu.

Ils calculent la prime de risque quand le risque devient "petit".

Ils expliquaient pourquoi ils en étaient arrivés à cette mesure à partir d'un calcul à partir duquel on va voir la mesure qui selon eux est la meilleure pour mesurer le degré d'aversion au risque d'un individu. C'est une mesure possible d'aversion au risque, elle émerge de façon assez naturelle.

Soit ω la richesse certaine d'un individu.
On considère une loterie z d'espérance nulle $Ez = 0$ et telle que la loterie soit "petite", c'est à dire les valeurs $z_1, ..., z_m$ tendent vers 0.
En supposant que la prime de risque π est petite, on a l'approximation:

$$u(\omega - \pi) \sim u(\omega) - \pi u'(\omega).$$

On prend un individu qui a une richesse omega qui va jouer une loterie d'espérance nulle, je lui donne quelque chose mais je lui retire directement après (+z - z). Quand on fait l'espérance, la loterie proposée a une espérance nulle.

Qcq qui se passe quand cette valeur a des valeurs qui vont tendre vers 0 (positif ou négatif), autrement dit une loi de plus en plus petite ?

Première idée : si la loterie est petite, la prime de risque l'est aussi. fonction u différentiable.

développement limité → approximation quand la valeur de epsilone est faible

Si on a une loterie suffisamment petite, la prime de risque aussi, on va pouvoir utiliser l'approximation qui est là.

De plus, comme les valeurs $z_1, .., z_m$ tendent vers 0, pour tout i

$$u(\omega + z_i) \sim u(\omega) + z_i u'(\omega) + \frac{1}{2} z_i^2 u''(\omega)$$

En prenant l'espérance

$$\sum_i p_i u(\omega+z_i) \sim \sum_i p_i u(\omega)+\sum_i p_i z_i u'(\omega)+\frac{1}{2}\sum_i p_i z_i^2 u''(\omega).$$

$$Eu(\omega + z) \sim u(\omega) + \frac{1}{2} v(z)\, v''(\omega)$$

$$u(\omega + \pi) = Eu(\omega + z) \sim u(\omega) - \pi u'(\omega)$$

$$\frac{1}{2} v(z)\, u''(\omega) = -\pi\, u'(\omega).$$

Comme $\sum_i p_i = 1$, $\sum_i p_i z_i = Ez = 0$ et $\sum_i p_i z_i^2 = V(z)$,

$$Eu(\omega + z_i) \sim u(\omega) + \frac{1}{2} V(z) u''(\omega).$$

Par définition de la prime de risque, $Eu(\omega + z_i) = u(\omega - \pi)$.
Donc

$$\pi \sim -\frac{V(z) u''(\omega)}{2u'(\omega)}.$$

La quantité $A(\omega) = -\frac{u''(\omega)}{u'(\omega)}$ s'appelle le **coefficient d'aversion au risque d'Arrow Pratt**

La prime de risque que l'individu est prêt à payer on peut la définir comme un produit de deux termes : variance (ne dépend que de la loterie) et ratio u''/2u' omega (dépend uniquement de l'utilité et de la richesse.

Si u est concave, variance toujours positif, u' toujours positif (monotone croissante), alors la prime de risque est positive et inversement si u est convexe.

On a cette mesure qui permet d'identifier chacun des individus pour une loterie z donnée et plus cette mesure va être élevée, plus la prime de risque le sera aussi. Peut être utilisé pour mesurer l'aversion au risque d'un individu. L'individu A a plus d'avoir au risque ssi pour toute richesse, la mesure d'aversion au risque de A et P est plus élevé pour l'individu A que pour l'individu B

NB/ Pas de démonstration de ce type à l'examen, sur la base des TD, calcul numérique.

Le coefficient d'aversion au risque d'Arrow Pratt mesure le degré de concavité de la fonction $u(\cdot)$, $u''(\cdot)$

Comme cette quantité n'est pas indépendante des transformations affines positives, on divise par $u'(\cdot)$

Comme la fonction $u(\cdot)$ est croissante et concave, $u'(\cdot) > 0$ et $u''(\cdot) < 0$ on doit donc ajouter un signe $-$ pour obtenir un coefficient positif.

Le résultat d'Arrow pratt nous dit que les trois façons de mesurer l'aversion au risque sont équivalents :

- fonction transformation concave
- calcul prime de risque
- arrow prat

- Le théorème de Pratt

Theorem

Soient deux individus riscophobes A et B avec des fonctions d'utilité de Bernoulli u et v. Les trois propriétés suivante sont équivalentes:

1. *La fonction u est une transformation strictement croissante et strictement concave de la fonction v*
2. *Quelle que soit la richesse aléatoire W, la prime de risque de l'individu A est plus élevée que la prime de risque de B.*
3. *En n'importe quel point w, le coefficient d'Arrow Pratt de l'individu A est supérieur au coefficient d'Arrow Pratt de l'individu B.*

- Risque multiplicatif

Jusqu'à présent, on a toujours considéré que le risque s'ajoutait à la richesse certaine:

$$W = \omega + X,$$

C'est ce qu'on appelle **le risque additif**
Mais on peut aussi supposer que le risque est calculé en pourcentage de la richesse certaine:

$$W = \omega(1 + Y),$$

C'est ce qu'on appelle **le risque multiplicatif**

Mesure d'aversion au risque relatif d'Arrow et Pratt, une des façon de la justifier : au moins d'avoir un risque additif (variable aléatoire que l'on rajoute à notre niveau de richesse), on a un risque multiplicatif (risque mesuré en %)

On peut aussi décider de mesurer le risque sous forme relative et non absolu. On pense à la loterie comme étant une loterie qui représente 50%, 100% ou 200% de notre richesse.

- Prime de risque relatif

Par exemple, supposons un individu dont la richesse est $\omega = 200$ et qui peut baisser de 25% avec probabilité 0.4 et augmenter de 50% avec probabilité 0.6.
Il a une fonction d'utilité $u(x) = \sqrt{x}$.
Cet exemple est identique à une loterie $(150, 300; 0.4, 0.6)$, et on peut calculer l'équivalent certain $w^* = 233,82$, la prime de risque $\pi = 6.18$, le prix de vente $p_v = 33.82$.

Il est plus naturel d'exprimer ces valeurs en fonction du taux de rendement:

- L'espérance du taux de rendement est $E(Y) = 20\%$
- Le taux de rendement équivalent certain est $y^* = \frac{33.82}{200} = 16.91\%$
- La prime de risque relatif est donnée par $\pi' = E(Y) - y^* = 20 - 16.91 = 3.09\%$

Plus généralement on définit le taux de rendement équivalent certain comme la solution de

$$Eu(\omega(1 + Y)) = u(\omega(1 + y^*)),$$

Et la prime de risque relatif:

$$u(\omega(1 + E(Y) - \pi')) = Eu(\omega(1 + Y)).$$

- Prime de risque relatif et prime de risque absolu

On distingue maintenant la prime de risque relatif π' de la prime de risque (absolu) π.

On a

$$E(W) - \pi = E(W) - \omega\pi',$$

Et donc

$$\pi = \omega\pi'.$$

Les deux primes de risque ont donc le même signe:

- π et π' sont positives si l'individu est riscophobe
- π et π' sont nulles si l'individu est neutre au risque
- π et π' sont négatives si l'individu est riscophile

On peut tout écrire en termes de % de notre niveau de richesse. formule qui relie la prime de risque relative à la prime de risque absolue

Les primes de risque qui ont des valeurs différentes : une en % l'autre en valeur absolue amis ces primes de risque ont le même signe, (positives ou négatives).

$$\pi = A_a(\omega)\, v(z)$$

NB/ À apprendre : les définitions et le lien entre les deux.

- Coefficient d'aversion au risque relatif et absolu

On distingue entre le coefficient d'aversion au risque relatif et absolu:

Coefficient relatif:

$$A_r(w) = -\frac{wu''(w)}{u'(w)}$$

Coefficient absolu:

$$A_a(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)}.$$

Coefficient d'aversion au risque absolu : plus un individu est riche, plus l'aversion est faible. Le coefficient d'aversion absolue au risque est décroissant avec notre niveau de richesse

Coefficient d'aversion au risque relatif : question plus compliquée, en terme de % de la richesse que l'on a, si on nous propose de perdre 20% de notre richesse si on est riche/pauvre ce n'est pas la même. Moins évident de savoir qui va réagir comment. Le plus riche peut avoir une aversion au risque plus élevée car il est milliardaire tandis que pour le fonctionnaire (pauvre), aversion plus faible.

- Richesse et aversion absolue au risque

Un individu plus riche est prêt à prendre des paris plus risqués.
Plus une entreprise a de fonds propres, plus elle s'assure elle-même.

L'aversion absolue au risque diminue avec la richesse :

$$\frac{\partial A_a}{\partial w} < 0.$$

- Richesse et aversion relative au risque

Si on différencie $A_r(w) = wA_a(w)$ par rapport à w:

$$\frac{\partial A_r}{\partial w} = A_a + w\frac{\partial A_a}{\partial w}.$$

Si l'individu est riscophile, $A_a < 0$ et donc $\frac{\partial A_r}{\partial w} < 0$:
l'aversion relative au risque décroît avec la richesse.
Si l'individu est riscophobe, $A_a > 0$, et le signe est ambigu.
Si ω augmente, la variance augmente au taux ω^2. On suppose d'habitude que cet effet (effet risque) fait augmenter A_a à un taux plus rapide que $w\frac{\partial A_a}{\partial w}$
On suppose donc que l'aversion relative au risque augmente avec la richesse:

$$\frac{\partial A_r}{\partial w} \geq 0.$$

- Fonctions d'utilité linéaires

Les fonctions s'écrivent

$$v(w) = aw + b,$$

avec $a > 0$.
On considère la représentation:

$$u(w) = w.$$

Cette fonction d'utilité correspond aux individus neutres au risque.
$A_a = A_r = 0$.
A_a n'est pas décroissante

- Fonctions d'utilité logarithmique

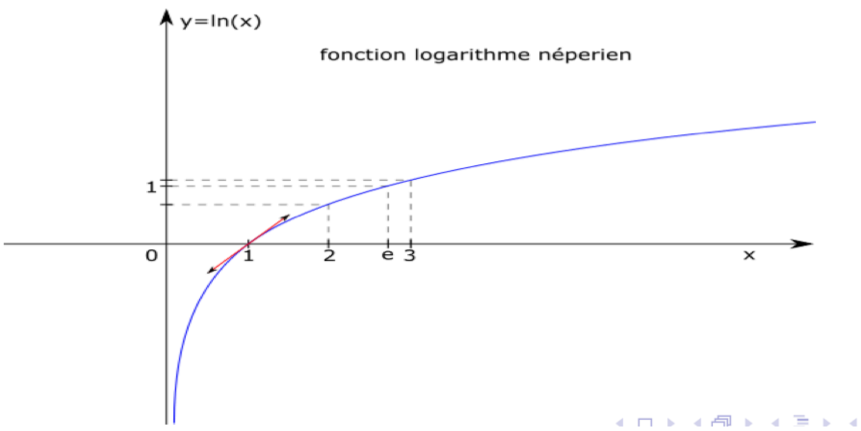
Les fonctions s'écrivent

$$v(w) = a \log_b(w) + b,$$

avec $a > 0, b > 0$.
On considère la représentation:

$$u(w) = \ln w.$$

non définie si $w = 0$
$u''(w) = -\frac{1}{w^2} < 0$ donc **aversion au risque**
$A_a(w) = \frac{1}{w}$ est décroissante
$A_r(w) = 1$ est constante.



- Fonctions d'utilité quadratiques

Les fonctions s'écrivent

$$v(w) = aw^2 + bw + c,$$

avec $a < 0$. Cette fonction n'est définie que pour $w < \frac{-b}{2a}$
On considère la représentation:

$$u(w) = w - \alpha w^2 \text{ pour } \alpha > 0, 0 \leq w < \frac{1}{2\alpha}.$$

On calcule

$$u'(w) = 1 - 2\alpha w, u''(w) = -2\alpha.$$

On satisfait bien la monotonie si $w < \frac{1}{2\alpha}$ et la concavité
aversion au risque
$A_a = \frac{2\alpha}{1-2\alpha w}$ est **croissante en** w
$A_r = \frac{2\alpha w}{1-2\alpha w}$ est croissante en w.

- Fonction d'utilité quadratique et fonction de Markowitz

Comme $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$,
On peut écrire:

$$\begin{aligned} U(W) &= E(W) - \alpha E(W^2), \\ &= E(W) - \alpha V(W) - \alpha E(W)^2 \\ &= E(W) - \alpha E(W)^2 - \alpha V(W) \end{aligned}$$

La fonction d'utilité espérée peut donc s'écrire comme une fonction qui ne dépend que de $E(W)$ et de $V(W)$.
Comme $E(W) \leq \frac{1}{2\alpha}$, la fonction est bien croissante en $E(W)$ et décroissante en $V(W)$
La fonction d'utilité de Bernoulli quadratique conduit donc à une fonction d'utilité espérée de Markowitz.

$E[x - \alpha x^2]$

Variance : $E(x^2) - (E(x))^2$

Variance $(x) + E(x^2)$

$E(x) - \alpha E(x^2)$

$E(x) - \alpha$ variance $(x) - \alpha (E(x))^2$.

Si j'ai une fonction d'utilité quadratique, on peut l'écrire comme une fonction à la variance et de la moyenne.

- Fonctions d'utilité puissances

Les fonctions s'écrivent

$$v(w) = aw^\alpha,$$

On considère la représentation:

$$u(w) = \frac{w^\alpha}{\alpha}.$$

On a $u'(w) = w^{\alpha-1} > 0$
On a $u''(w) = (\alpha - 1)w^{\alpha-2}$. On a donc **aversion au risque** si $\alpha < 1$, **neutralité au risque** si $\alpha = 1$, **goût pour le risque** si $\alpha > 1$.
On a $A_a = \frac{1-\alpha}{w}$, qui est bien décroissante avec w
On a $A_r = 1 - \alpha$**, indépendant de la richesse**
Fonctions CRRA (Constant Relative Risk Aversion)

- Fonctions d'utilité exponentielles négatives

On considère la fonction:

$$u(w) = -e^{-\alpha w}.$$

$u'(w) = \alpha e^{-\alpha w} > 0$
$u''(w) = -\alpha^2 e^{-\alpha w}$ On a toujours *aversion au risque*
$A_a = \alpha$. **L'aversion au risque absolue est constante, égale à** α
$A_r w\alpha$, croissante en w
Fonctions CARA (Constant Absolute Risk Aversion)

- Fonctions d'utilité exponentielles et loi normale

Quand la richesse suit une loi normale, alors

$$E(-e^{-\alpha W}) = -e^{-\alpha E(W) + 0.5\alpha^2 V(W)}$$

Le programme d'un agent qui maximise son espérance d'utilité est alors

$$\min e^{-\alpha E(W) + 0.5\alpha^2 V(W)},$$

ou de façon équivalente

$$\max E(W) - \frac{1}{2}\alpha V(W).$$

Il s'agit donc d'une fonction d'utilité espérée de Markowitz linéaire.

- Fonction d'utilité exponentielle et prime de risque

$E(-e^{-\alpha W}) = -e^{-\alpha(E(W)-\pi)}$ où π est la prime de risque.
Si la distribution de richesse est normale,
$E(-e^{-\alpha W}) = -e^{-\alpha E(W)+0.5\alpha^2 V(W)}$
Donc

$$-\alpha(E(W)-\pi) = -\alpha E(W) + \alpha^2 \frac{1}{2} V(W),$$

Et

$$\pi = \frac{\alpha V(W)}{2},$$

La prime de risque est proportionnelle à la variance
Ce résultat rappelle le résultat d'Arrow-Pratt, mais pour tous les risques, pas uniquement pour les petits risques.

- Tableau récapitulatif

fonction	attitude risque	aversion absolue	aversion relative
$u(w) = w$	neutre	constante 0	constante 0
$u(w) = \ln w$	averse	décroissante	constante 1
$u(w) = w - \alpha w^2$	averse	croissante	croissante
$u(w) = w^{\alpha}$	averse si $\alpha < 1$	décroissante	constante $1 - \alpha$
$u(w) = -e^{-\alpha w}$	averse	constante α	croissante

- Risque d'une loterie

Quand on compare deux loteries L et L' qui ont la même espérance, quand peut-on dire qu'une loterie est plus risquée qu'une autre ?

Quand tous les individus préfèrent la loterie L' à la loterie L.

Une possibilité est de classer les loteries selon leur variance.

Une façon de définir qu'une loterie est plus risquée qu'une autre : pour toute fonction u concave, l'individu va choisir une loterie à une autre.

- Avantage de la variance

Elle est facile à calculer.
Formule d'approximation de la prime de risque :

$$\pi \simeq \frac{V(W)}{2} A_a.$$

Fonctions d'utilité de Markowitz : la variance est l'unique mesure de risque quand $E(W) = E(W')$.

- Problème avec la variance

On considère les deux loteries:

- $\mathcal{L} = (0, 4; 0.5, 0.5)$
- $\mathcal{L}' = (1, 9; \frac{7}{8}, \frac{1}{8})$

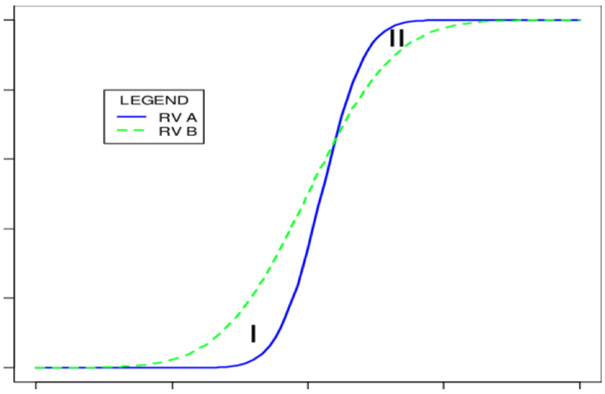
Un individu a une fonction d'utilité de Bernoulli $u(w) = \sqrt{w}$
On trouve: $E(\mathcal{L}) = E(\mathcal{L}') = 2$, $V(\mathcal{L}) = 4 < V(\mathcal{L}')$ mais
$E(\sqrt{\mathcal{L}}) = 1 < E(\sqrt{\mathcal{L}'}) = 1.25$

- Dominance stochastique d'ordre 2

Definition

La distribution F domine stochastiquement d'ordre 2 la distribution G si et seulement si, pour tout x

$$\int_{-\infty}^{x} F(t)dt \leq \int_{-\infty}^{x} G(t)dt.$$



Deux variables aléatoires. Pas classées selon la dominance stochastique d'ordre 1 car elles se croisent. or, DSO1 : fonction de répartition qui ne se croisent pas. Il faut qu'elles se croisent car elles doivent avoir la même espérance. Si les deux fonctions ont la même espérance, il n'est pas possible qu'une domine stochastiquement à l'ordre 1.
Bleu DSO/2 2 la verte. Jusqu'au point d'intersection, l'aire sous la droite bleue est toujours plus petite que l'aire sous la droite verte.

Theorem

Tous les individus riscophobes préfèrent la distribution F à la distribution G si et seulement si F domine stochastiquement à l'ordre 2 la distribution G

- Dominance stochastique à espérance égale

On suppose que les deux loteries $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ ont la même espérance, $E\mathcal{L} = E\mathcal{L}'$.

Si $\mathcal{L}$ domine stochastiquement $\mathcal{L}'$ à l'ordre 2, alors $V(\mathcal{L}) < V(\mathcal{L}')$

La condition est nécessaire car un individu avec fonction d'utilité quadratique préfère toujours la distribution dont la variance est plus faible.

La condition n'est pas suffisante (voir l'exemple plus haut d'un individu riscophobe qui préfère une distribution avec variance plus élevée).

- L'ajout de bruits blancs

On compare

- $\mathcal{L} = (1, 5, 10; 0.2, 0.6, 0.2)$
- $\mathcal{L}' = (1, 4, 6, 10; 0.2, 0.3, 0.3, 0.2)$

On peut écrire $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \epsilon$, avec
$\epsilon = (-1, 1; 0.5, 0.5)$

C'est une distribution qui a une espérance nulle

ϵ est un *bruit blanc*: une variable aléatoire d'espérance nulle

Si $\mathcal{L}'$ est obtenu de $\mathcal{L}$ par l'ajout de bruits blancs, l'espérance de $\mathcal{L}$ et de $\mathcal{L}'$ sont égales

Si $\mathcal{L}'$ est obtenu de $\mathcal{L}$ par l'ajout de bruits blancs, alors $\mathcal{L}$ domine stochastiquement à l'ordre 2 $\mathcal{L}'$.

Une distribution DSO une autre si L' peut être obtenue à partir de L par de l'ajout de bruits blancs.

On va construire une loterie en deux étapes : on a ici la loterie L et L', on ne peut pas savoir comme ça si une est plus risquée que l'autre. Entre L et L', on a l'impression que le résultat 1 est obtenu avec la même proba, 10 même proba mais mtn on obtient 4 avec proba 30% et 6 avec proba 30%. l'espérance des deux loteries est la même. On a pris la loterie L et on a rajouté une deuxième loterie. La loterie L' est obtenue à partir de la loterie L, pour chaque réalisation de la loterie L, je tire une autre loterie après qui va avoir une espérance nulle mais qui va rajouter du bruit, rajouter de la diversité.

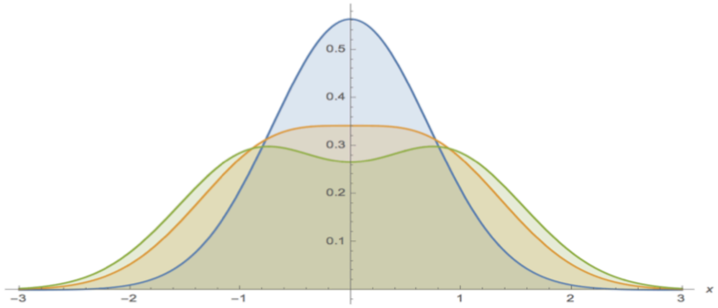
Pour toute fonction d'utilité concave, tout individu qui a de l'aversion au risque va choisir la loterie L à la loterie L'. L est préféré à L'.

On ajoute du bruit balnc : pour chacune des réalisations, on tire une nouvelle loterie mais qui a une espérance nulle pour obtenir un résultat plus diversifié.

- Le transfert de poids

Par transfert de poids ("mean preserving spread") on entend qu'on prend du poids "au centre" de la distribution pour le déplacer aux extrémités tout en conservant la même moyenne.

Si la distribution G est obtenue d'une distribution F par transfert de poids, alors F domine stochastiquement à l'ordre 2 la distribution G.



Les trois distributions ont une espérance nulle. Pour passer du bleu à orange, on prend du poids au centre de la distribution et on répartit.

Le bleu domine orange et orange domine vert.

- Distributions normales

Soient F et G sont des distributions normales de même moyenne.

Si G a une variance plus élevée que F, alors G peut être obtenue de F par un transfert de poids.

Donc F domine stochastiquement à l'ordre 2 G si G a une variance plus élevée que F.