Ex 7

Résolution des équations dans $\mathbb{C}$:

(a) $t^2 + 7 = 0$

$t^2 = -7$

$\Rightarrow t = \pm\sqrt{-7} = \pm\sqrt{-1}\cdot\sqrt{7} = \pm\sqrt{7}\, i$ en posant $i = \sqrt{-1}$

(b). $3t^2 + t + 5 = 0$.

Calcul du discriminant $\Delta = 1^2 - 4(3)(5) = -59$.

$$\Rightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{\Delta}}{2\times 3} = \frac{-1+\sqrt{-59}}{6}, \frac{-1-\sqrt{-59}}{6}.$$

$$\boxed{t_1 = \frac{-1+\sqrt{59}\, i}{6} \qquad t_2 = \frac{-1-\sqrt{59}\, i}{6}}$$

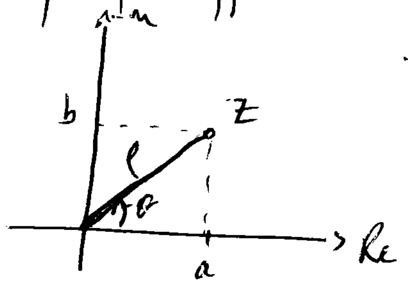
Corrections Thème 5 : Complexes.

Généralités sur les complexes : le minimum vital...

- On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. Particularité de $\mathbb{C}$: contient un nombre i tel que $i^2 = -1$ ou encore $\sqrt{-1} = i$ (lettre grec iota). Tout nombre complexe Z peut s'écrire sous la forme $a+ib$ (forme cartésienne) ou $\rho e^{i\theta}$ (forme polaire) avec :

a = partie réelle = $Re(Z)$
b = partie imaginaire = $Im(Z)$
ρ = module de Z = $|Z| = \sqrt{a^2+b^2}$
θ = argument de Z = $\arg(Z)$. avec $\tan\theta = \frac{b}{a}$

- Imaginez un nombre complexe comme un couple (a,b) ou (ρ,θ) que l'on peut représenter sur un plan de $\mathbb{R}^2$ muni d'un ensemble d'opérations. Ce plan s'appelle un diagramme d'Argand.



- Par construction, un nombre réel sera représenté sur l'axe des abscisses uniquement avec un argument de 0.
- Un imaginaire pur (ex : $5i$) sera sur l'axe des ordonnées avec un module = b et argument = $\frac{\pi}{2}$.

- En particulier, $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$.
- Conjugué de $Z = \bar{Z} = a - ib$.
$Z\bar{Z} = |Z|^2$.
- $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, avec la formule de Moivre :
$$\left(e^{i\theta}\right)^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

- $\arg(Z^n) = n\cdot\arg(Z)$.
$$Z^n = \left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}.$$

Ex 1

$$Z_1 = (3+i)(5-2i) = 3\times5 + 3\times(-2i) + i\times5 + i\times(-2i).$$
$$= 15 - 6i + 5i \underbrace{- 2i^2}_{-2\times -1 = 2.}$$
$$= \underline{17 - i}$$

$$Z_2 = (4-7i)^3 = (4-7i)(4-7i)^2$$
$$= (4-7i)\left(4^2 - 2(4)(+7i) + (-7i)^2\right)$$
$$= (4-7i)(16 + \cancel{8}56i + 49i^2) \qquad 49\times -1 = -49$$
$$= (4-7i)(-33-56i)$$
$$= 4\times(-33) + 4\times(-56i) + (-7i)(-33) + (-7i)\times(-56i)$$
$$= -132 - 224i + 231i + 392i^2$$
$$= \underline{-524 + 7i}$$

$$Z_3 = it^2 - 3t + 4 - 2i \qquad t = x+iy.$$
$$t^2 = x^2 + 2xyi + i^2y^2$$
$$= (x^2-y^2) + 2xy\,i$$

$$\Rightarrow Z_3 = i(x^2-y^2+2xyi) - 3(x^2-y^2+2xyi) + 4 - 2i.$$
$$= (4 - 3x - 2xy) + (x^2 - y^2 - 3y - 2)\,i$$

Ex 2.

Quand vous avez une fraction de la forme $\frac{Z_1}{Z_2}$ avec $Z_1, Z_2 \in \mathbb{C}$, pour faire "disparaître" la partie imaginaire du dénominateur, il faut multiplier la fraction par $\frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_2}$ et calculer....

$$Z_4 = \frac{6-7i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} = \frac{(6-7i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{6-6i-7i+7i^2}{1^2 - 1i^2} \quad 1-(-1) = 2$$
$$= -\tfrac{1}{2} - \tfrac{13}{2}\,i$$

$$Re(Z_4) = -\tfrac{1}{2} \qquad Im(Z_4) = -\tfrac{13}{2}.$$

$$Z_5 = \frac{3-i}{2i-5} \times \frac{-2i-5}{-2i-5} = \frac{-15-6i+5i+2i^2}{(-5)^2 - (2i)^2} = \frac{-17-i}{29}.$$

$$Re(Z_5) = -\tfrac{17}{29} \qquad Im(Z_5) = -\tfrac{1}{29}.$$

Ex 3.

(a) $(1+2i)t = 3t - 5i + 2$

$t + 2ti - 3t = 2 - 5i$

$t(-2+2i) = \underline{2-5i}$

$\Rightarrow t = \frac{2-5i}{-2+2i} \times \frac{-2-2i}{-2-2i}$

$\underline{t = -\frac{7}{4} + \frac{3}{4}i}$

(b) $t - (5+2i)\bar{t} = 2t - 5i$.

On pose $t = x+iy$. $\Rightarrow \bar{t} = x - iy$.

$x+iy - (5+2i)(x-iy) = 2(x+iy) - 5i$

$x+iy - (5x - 5yi + 2xi - 2yi^2) = 2x + 2yi - 5i$.

$x+iy - 5x + 5yi - 2xi - 2y = 2x + 2yi - 5i$.

$\underbrace{6x + 2y}_{A} = \underbrace{2xi - 4yi - 5i}_{B}$.

$Re(A) = 6x + 2y = Re(B) = 0$. — 1

$Im(A) = 0 = Im(B) = 2x - 4y - 5$ — 2

$\left.\begin{array}{ll} 6x+2y = 0 & -1 \\ 2x - 4y = 5 & -2 \end{array}\right\}$ $x = 5/14$, $y = -15/14$.

$\underline{t = 5/14 - 15/14\, i}$.

Ex 4. $Z_6 + Z_7 = -5 + 4i = S$

$Z_6 Z_7 = 3 - 11i = P$

2 racines sont solutions de l'équation du degré 2 :

$Z^2 - SZ + P = 0$ (vraie pour les réels aussi)

$\Rightarrow Z^2 - (-5+4i)Z + (3-11i) = 0$

Résolution en calculant le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-5+4i)^2 - 4(3-11i) = 25 - 40i + 16i^2 - 12 + 44i = -3 + 4i$

Or, $Z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5+4i \pm \sqrt{\Delta}}{2}$. Reste à calculer $\sqrt{\Delta}$.

- Méthode 1

On pose $(x+iy)^2 = \Delta \Rightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = -3 + 4i$

Par identification $x^2 - y^2 = -3$ — 1

$2xy = 4$. — 2

De plus, on sait que $|\Delta| = \sqrt{(-3)^2+4^2} = 5 = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = |x+iy|^2$ (4)

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 5 \quad - (3).$$

(1) + (3), $x^2 = \dfrac{5-3}{2} = 1 \Rightarrow x = \pm 1.$

(3) − (1), $y^2 = \dfrac{5-(-3)}{2} = 4 \Rightarrow y = \pm 2.$

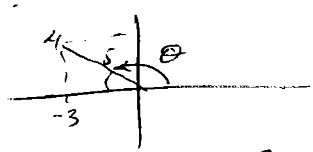
Or, avec (2), $xy = 2 \Rightarrow x$ et y du même signe.

$\pm\sqrt{\Delta} = -1-2i$ et $1+2i$.

Méthode 2 : Bien connaître les relations trigonométriques

$|\Delta| = \sqrt{(-3)^2+4^2} = 5.$

$\tan\theta = -4/3$



Mais on peut calculer $\cos\theta = -3/5$ ou encore $\sin\theta = 4/5$.

$\Delta = \rho e^{i\theta} \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \rho^{1/2} e^{i\theta/2} = \sqrt{5}\left(\cos\theta/2 + i\sin\theta/2\right).$

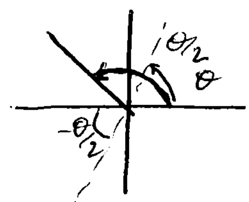
Identités trigonométriques utiles : $\begin{cases} \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1. \\ \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ \qquad\quad = 2\cos^2\theta - 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \cos\theta = 2\cos^2\theta/2 - 1$

$\Rightarrow \cos^2\theta/2 = \dfrac{-3/5+1}{2} = 1/5 \Rightarrow \cos\theta/2 = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}.$

$\sin^2\theta/2 = 1 - \cos^2\theta/2 = 1 - 1/5 = 4/5$

$\Rightarrow \sin\theta/2 = \pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}.$



$\sqrt{\Delta} = \pm 1 \pm i2$. Sur la figure, les solutions possibles sont $-1-i2$ ou $1+2i$.

$$\Rightarrow Z = \frac{-5+4i \pm\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-5+4i \pm (1+2i)}{2}$$

$$Z = \{-2+3i, -3+i\}.$$

Ex 5 :

Méthode 1. $|Z| = \left|\frac{1}{Z}\right| \Rightarrow |Z|^2 = 1.$ — ①

$|Z| = |1-Z|.$ ——— ②

On pose $Z = x+iy$.

De ①, on a $x^2+y^2 = 1$.

②, $x^2+y^2 = (1-x)^2+y^2$.

$\cancel{x^2} = \cancel{x^2} - 2x + 1$.

$x = 1/2$.

$x = 1/2 \Rightarrow (1/2)^2 + y^2 = 1. \Rightarrow y^2 = 3/4 \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$Z = \left\{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \ 1/2 + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$.

Méthode 2

$|Z| = \left|\frac{1}{Z}\right| \Rightarrow |Z|^2 = 1$

$\Rightarrow |Z| = 1. \Rightarrow Z = e^{i\theta}$ avec $\rho = 1$.

D'autre part, $|Z| = \left|\frac{1}{Z}\right| = |1-Z| \Rightarrow |1-Z| = 1.$

$|e^{i0} - e^{i\theta}| = 1.$

$\Rightarrow |-e^{i\theta/2}(e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2})| = 1.$

Or $|e^{i\theta/2}| = 1. \Rightarrow |e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}| = 1.$

$\Rightarrow \left|2i \sin\frac{\theta}{2}\right| = 1.$

$|\sin\theta/2| = 1/2.$

$\sin\frac{\theta}{2} = \pm 1/2.$

$\sin\theta/2 = 1/2$ et $\sin\theta/2 = -1/2$.

$\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{6}$ ou $\frac{5\pi}{6}$ $(\pm 2k\pi)$. $\qquad \frac{\theta}{2} = -\frac{\pi}{6}$ ou $-\frac{5\pi}{6}$ $(\pm 2k\pi)$.

$\theta = \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{5\pi}{3}$ $(\pm 2m\pi)$ $\qquad \theta = -\frac{\pi}{3}$ ou $-\frac{5\pi}{3}$ $(\pm 2m\pi)$

$m = k/2 \ldots$

Or $\frac{5\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow Z = \left\{e^{i\pi/3}, e^{i5\pi/3}\right\}.$

Ex 6

$Z_9 = i e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{5\pi}{6}}.$

$= \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right).$

$|Z_9| = 1.$

$\arg Z_9 = \frac{5\pi}{6}.$

$Re(Z_9) = \cos\frac{5\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$Im(Z_9) = \sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = 1/2.$

$Z_{10} = -e^{-i\frac{\pi}{4}} = e^{i\pi} \cdot e^{-\frac{\pi}{4}}$ car $-1 = e^{-i\pi}.$

$= e^{i(\pi - \pi/4)}$

$= e^{i\,3\pi/4}.$

$= \cos 3\pi/4 + i \sin\frac{3\pi}{4}.$

$= -\cos \pi/4 + i \sin \pi/4.$

$= -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i.$

$Z_{11} = 1 + i\sqrt{3} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}\, e^{i \underbrace{\arctan(\sqrt{3}/1)}_{= \pi/3}} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}.$

$\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$

ou

On remarque que $1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$ .... et on sait que $\cos\frac{\pi}{3} = 1/2$ $\left(\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}/2\right)$ ....

$Z_{12} = [Z_{10}]^2 = \left(-e^{-i\pi/4}\right)^2 = e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i.$

$|Z_{12}| = 1.$

$\arg Z_{12} = -\pi/2.$

$Re(Z_{12}) = 0$ et $Im(Z_{12}) = -1.$