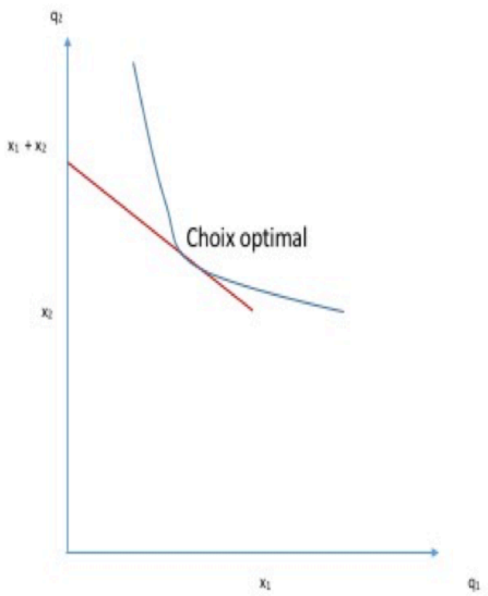
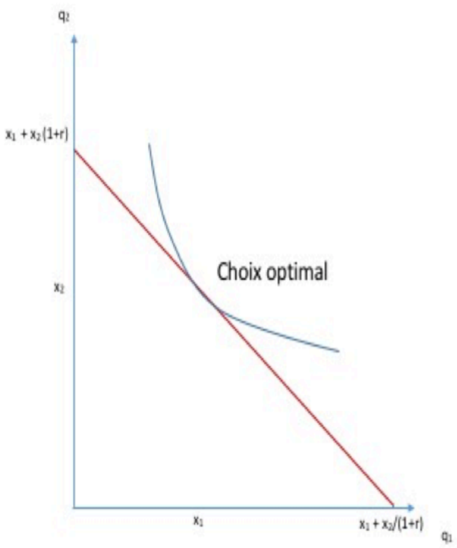
**Microéconomie : Incertain et information**

# Partie 1 : Préférences dans l'incertain

**Rappels préférences intertemporelles (introduction)**




L'ouverture des marchés financiers permet d'augmenter le nombre de choix possibles, on ouvre la possibilité d'épargner, donc on peut consommer tout $x1$ en période 1 ou bien on épargne en période 1 afin d'augmenter la consommation en période 2.




Si on décide d'emprunter, il faudra qu'on rembourse la période suivante.

Le maximum que l'on peut emprunter : $x2/(1 + r)$ (abscisse à l'origine).

Triangle en rouge → ensemble des opportunités possibles, avant, c'était un seul point, maintenant, on a tout le triangle en rouge. Cela veut dire que le choix optimal (tangente à la courbe d'indifférence) pourrait éventuellement être sur un point différent de $(x1, x2)$.

Marché financier parfait → la banque ne fait pas de marge, elle ne gagne pas d'argent car elle choisit un taux de prêt et un taux d'emprunt égaux.

Les "préférences en univers incertain" est un cours qui va décrire de façon générale les choix en univers incertain.

## 1. Choix en univers incertain

### A. L'incertain

En univers incertain, le décideur fait des choix avant d'observer la situation.
*Exemples* → *choix financiers, choix d'études…*

On est dans un monde avec une incertitude importante au moins de menacer la survie (exemples : économie du développement axée sur les problèmes d'incertitude). Si on construit des systèmes d'assurances formels ou informels, cela peut augmenter la qualité de vie des gens en pays en voie de développement.

Domaine de l'économie du travail, *comment rémunère-t-on les individus ? Salaire fixe ou salaire en fonction de ce que le salarié produit ?* C'est la question des **frontières de la firme** :

→ système de production sous la forme d'une entreprise qui embauche des salariés et leur donne des salaire ou bien;

→ chaque individu est libre (auto entrepreneur) et vend ses services, cette dernière situation est une **situation de contrat**. Chaque individu réalise des contrats avec les entreprises pour lesquelles il travaille.

*Quel est le lien avec l'économie de l'incertitude ?* Une des raisons pour lesquelles on n'est pas dans un système de contrat, c'est parce que toute l'incertitude est transférée vers le travailleur. L'idée de création d'une entreprise, de salaire fixe, vient de l'idée selon laquelle il est meilleur de **transférer le risque** vers l'entreprise car cette dernière a une meilleure aversion au risque, elle a un capitaliste riche comparé à un travailleur qui dépend de son travail afin de subvenir à ses besoins minimes.

L'incertitude est partout, elle a des conséquences dans tous les domaines de l'économie.

Dans un marché financier, on a un actif financier (= flux d'argent qui nous sera versé dans le futur); c'est incertain car les profits des entreprises ne sont pas connus. Dans le cas de l'achat d'une action, c'est par définition, l'achat d'un bien dont je ne connais pas la valeur.

Dans le cas de l'incertitude, un panier de biens ne peut plus être représenté par un vecteur de quantités.

On distingue les **choix** ou **actions** des **conséquences** ou **résultats**.

Les conséquences correspondent à des paniers de biens fixes.
Les choix sont faits sur des conséquences aléatoires.

### B. Risque et incertitude

Depuis **Knight** (1921), on distingue deux types de situation d'incertitude : le risque et l'incertitude complète.

L'incertitude est la situation dans laquelle le décideur (consommateur dans un univers incertain) ne connaît pas les conséquences et les risques auxquels il sera peut être confronté, il ne peut pas attribuer de probabilité aux conséquences.

*Exemple classique : la météo, dans un monde plus instable, on est incapables de dire quelle est la probabilité qu'il pleuve, les systèmes météos étant eux-même des systèmes probabilisés. On a uniquement des données probabilisées. C'est un monde d'incertitude, on est capable de décrire un système météo mais il nous est impossible de prévoir l'évolution entre maintenant et dans 6 heures, 12 heures…*

*Autre exemple d'incertitude plus forte : dans les contrats. Imaginons une entreprise de téléphones mobiles qui écrit un contrat avec une entreprise à Taïwan qui crée des puces. Contrat à 2 ans, ensemble de circonstances que l'on ne peut pas prévoir : invasion de Taïwan par la Chine, situation que l'on n'a pas prévue, typhon, tremblement de terre …on ne peut pas prévoir toutes les situations qui peuvent arriver.*

Inversement, il y a des situations pour lesquelles le système probabiliste est très **connu**, le seul risque est que l'on ne connaît pas la réalisation de ce qu'il va se passer. Le risque est une situation dans laquelle le décideur peut attribuer des probabilités aux conséquences.

*Exemple : l'entreprise réfléchit à la possibilité d'avoir un coup d'État qui va limiter les possibilités d'approvisionnement de l'entreprise, on peut leur attribuer des probas, à partir de ce moment-là, on est dans une situation de risque, on ne sait pas s'il va y avoir un coup d'État, c'est souvent des calculs de risque.*

Les coups d'État sont probabilisés par des experts. Les experts nous aident à analyser un système de risque.

Dans ce cours, on considérera surtout des situations de **risque**.

On peut également distinguer probabilités **objectives** (connues de tous) et **subjectives** (choisies par le décideur).

## 2. Loteries

On représente ces situations en décrivant une loterie représentée par un ensemble de montants monétaires. Les conséquences sont des **montants monétaires** (unidimensionnels).

On suppose que le décideur a des probabilités **subjectives** sur les conséquences.

On va avoir deux éléments :

- $x$ : ensemble des résultats possibles, ensemble de l'argent que l'on peut gagner.
- $p$ : ensemble de distributions de probabilité sur ces résultats.

Les loteries sont un ensemble fini de résultats possibles (presque toujours) avec des probabilités définies sur cet ensemble.

Une loterie est une variable aléatoire sur un ensemble de résultats.

### A. Exemples de loterie

- Supposons trois résultats possibles: $x_1 = 0, x_2 = 10, x_2 = 50$ avec des probabilités $p_1 = 0.5, p_2 = 0.2, p_3 = 0.3$
- Cette loterie s'écrit $\mathcal{L} = (0, 10, 50; 0.5, 0.2, 0.3)$
- En général, une loterie est une **distribution de probabilité** $p$ sur $X$ définie par:
  1. un sous-ensemble fini de $X$, qu'on appelle le **support** de $p$ et qui est dénoté $supp(p)$
  2. pour tout $x \in supp(p)$, un nombre réel positif $p(x) > 0$, tel que $\sum_{x \in supp(p)} p(x) = 1$.
- $X$ est l'ensemble de résultats possibles et $p$ la probabilité de chaque résultat.
- Toutes les probabilités doivent être non négatives et elles doivent sommer à 1.
- $P$ est l'ensemble des loteries.

*Remarque/ Avant le ; on met les trois résultats possibles puis les probabilités à la fin (après le ;).*

Le support d'une variable aléatoire sont les points pour lesquels il y a une probabilité positive (toutes les réalisations possibles). Pour chacun des points, on a la probabilité associée.

- Loterie $p$: On lance un dé et on reçoit un paiement de \$120 Euros si le chiffre est strictement inférieur à 3 et zéro sinon.
- $\mathcal{L} = (0, 120; \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$

- Loterie $q$: On lance une pièce de monnaie. Si elle tombe sur face on reçoit \$100 Euros et zéro sinon.
- $\mathcal{L} = (0, 100; 0.5, 0.5)$

Deux résultats (gains) possibles : 0 ou 120 euros.

## B. Application 1 : Assurance

Monsieur X possède une maison d'une valeur de $I$ euros. Cette maison peut être détruite par un incendie avec probabilité $p$. Il est dans un monde risqué dans lequel avec une probabilité $p$, il va perdre $I$, toute sa richesse.

Pour éviter qu'il soit face à une situation trop risquée, on lui propose un contrat d'assurance. L'indemnité que l'on reçoit en cas de sinistre et une indemnité que l'on paie peu importe s'il y a un sinistre ou non.

Une compagnie d'assurance s'engage à verser une indemnité $i$ en cas d'incendie en échange d'une prime annuelle $b$.

Un mauvais conducteur va probablement choisir un contrat à forte assurance, en contrepartie, la prime sera plus importante. Si on est un bon conducteur, on choisit d'assurer votre voiture au minimum légal (assurance routière qui ne nous rembourse pas nous mais l'autre voiture si c'est nous qui sommes en tort dans l'accident).

Dans la réalité, différents individus choisissent différents contrats d'assurance.

Les assureurs peuvent nous verser une indemnité comprise entre 0 et l'entièreté du bien assuré.

- On suppose que la prime est proportionnelle à l'indemnité: $b = \beta i$

β compris entre 0 et 1.

Une fois que l'on a eu l'assurance, la loterie à laquelle on fait face est :

- $\mathcal{L} = (-\beta i + i, -\beta i + I; p, 1 - p)$

Si on subit le sinistre, on perd la valeur $I$ mais on gagne $i$; mais, on paye aussi la prime d'assurance donc on enlève. Si on n'a pas de sinistre, on garde $I$ mais on paye la prime d'assurance donc $I$ -β$i$.

Sans assurance $L = (0, I; p, 1 - p)$.

Avec assurance $L' = (-\beta i + i, -\beta i + I; p, 1 - p)$.

Si on compare, on a réussi à diminuer la variance du revenu que l'on va avoir, c'est pour cela que l'assurance existe.

Du point de vue de la compagnie d'assurance qui touche une prime β$i$.et qui paie l'indemnité $i$ s'il y a un dégât. Quel est son profit ? β$i - pi$ (qui est la dépense que va faire la compagnie d'assurance en moyenne). Quand β$i = p$, on est dans une situation équitable, si la prime d'assurance est calculée de telle sorte que β= $p$, les compagnies d'assurance sont en concurrence,et aucune ne fait de bénéfice.

Dans un monde d'oligopole (comme c'est le cas aujourd'hui, petit nombre qui fait des profits), $\beta > p$. L'indemnité payée par le consommateur est, en moyenne, plus élevée que ce l'on nous versera en cas de sinistre. Le consommateur est prêt à le faire car si on a de l'aversion au risque, on est prêts à payer plus pour être indemnisés.

### C. Application 2, demande de travail dans l'incertain

Un producteur a une fonction de production :

$$q = 2\sqrt{l}$$

où $l$ est la quantité de travail.

Mais, le salaire qu'on verse est un salaire certain, w =2. Qu'est-ce que cela veut dire ? Cela veut dire que le travailleur a un risque limité, c'est le propriétaire de l'entreprise qui supporte le risque.

L'incertitude ici va venir du prix de vente du bien, de la demande à laquelle on fait face. Le prix de vente est incertain va être de 10, 12 ou 16 avec des probas de 0,4; 0,5 et 0,1 :

$$P = (10, 12, 16; 0.4, 0.5, 0.1)$$

Pour tout prix $P$, la maximisation du profit donne la fonction de travail suivante :

$$l^D = (P/2)^2.$$

Si on écrit le profit de l'entreprise :

2/ $\pi = pq - wL \qquad w\sqrt{L} = p$

$\pi = 2p\sqrt{L} - wL$

$\frac{\partial \pi}{\partial L} = \frac{2p}{2\sqrt{L}} - w \qquad \sqrt{L} = \frac{p}{w} = \frac{p}{2}$

Cela nous donne la demande de travail pour chaque prix $P$ possible.

On remet cette demande de travail dans la fonction de profit.

Pour un prix $P = 10$, la demande de travail sera $5^{2} = 25$.

$Profit = 2 \times 10 \times 5 - 2 \times 25$ → le profit est de 50. D'où le résultat.

C'est la situation d'une entreprise qui fait face à une demande incertaine (cyclique), plusieurs prix possibles mais l'on doit verser un salaire fixe aux travailleurs.

L'incertitude pour un travailleur va être de savoir s' il sera embauché ou non, en fonction de la demande adressée à l'entreprise. C'est un monde où on régule le marché du travail par du chômage.

CF théories insiders/outsiders. Insiders protégés par les syndicats, outsiders ne sont pas employés par les entreprises ou bien en intérim, pas de CDI. Ils vivent dans un monde beaucoup plus précaire, l'idée de ce modèle est qu'il y a une externalité entre les deux, si les insiders sont bien traités, les outsiders le seront moins et inversement. Sorte de rivalité entre in/out siders.

## D. Loteries composés

- Supposez qu'on ait deux distributions de probabilité simples $p$ et $q$ et un nombre $\alpha \in [0, 1]$.
- On construit une nouvelle distribution de probabilité appelée *loterie composée*,comme $r = \alpha p + (1 - \alpha)q$. Cette construction se fait en deux étapes: beginenumerate
- $supp(r) = supp(p) \cup supp(q)$
- pour tout $x \in supp(r)$, $r(x) = \alpha p(x) + (1 - \alpha)q(x)$, où $p(x) = 0$ si $x \notin supp(p)$ et $q(x) = 0$ si $x \notin supp(q)$.

À partir de deux situations d'incertitude, on en crée une troisième qui dépend des deux situations initiales.

Comment les construit-on ? On part de deux loteries simples, α est la façon dont on va composer, conjuguer les deux loteries ($p$ et $q$).

La loterie composée sera construite en créant un nouveau degré d'incertitude. On crée une nouvelle loterie $r$ en jouant sur une certaine probabilité la loterie $p$ et une autre probabilité la loterie $q$. Les résultats possibles sont tous les résultats possibles soit sous $p$, soit sous $q$. Le support de cette loterie $r$ est le support de ces deux supports ($p$ et $q$). C'est l'union des deux supports (non l'intersection).

## E. Exemple de loterie composée

- $\alpha$ est la probabilité de choisir la loterie $p$ (lancer le dé) et $1 - \alpha$ la probabilité de choisir la loterie $q$ (lancer la pièce).
- On suppose $\alpha = \frac{1}{4}$ et $1 - \alpha = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
- $(p, q; \frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ est la loterie composée où la loterie simple est choisie avec probabilité $\frac{1}{4}$, et la loterie simple $q$ avec probabilité $\frac{3}{4}$.

3/ $\alpha = \frac{1}{4}$ ; $1 - \alpha = \frac{3}{4}$

$p = (0, 120 ; \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$

$q = (0, 100 ; \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$r = (0, 100, 120, \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4})$.

Obtenir 0 peut être réalisé de deux façons : en jouant $p$ avec une proba de ¼ x ⅔ et en jouant $q$ avec une proba de ¾ x ½ , soit la somme des deux : $15/24$.

Obtenir 100 : il faut jouer à la loterie $q$ et obtenir 100 ⟶ ¾ x ½ = 3/8.

Obtenir 120 : il faut jouer la loterie $p$ et obtenir 120 ⟶ ¼ x ⅓ = 1/12.

### F. Loteries réduites

- Pour toute loterie composée, on peut calculer la *loterie réduite* qui est la loterie simple qui produit la même distribution de probabilité sur les résultats.
- Soit $(p_1, ..., p_K; \alpha_1, ..., \alpha_K)$ une loterie composée formée de $K$ loteries simples. $\hat{p}$ est la loterie réduite qui engendre la même distribution de probabilité sur les résultats,
- Pour tout $x \in X$, $\hat{p}(x) = \sum_{i=1}^{K} \alpha_i p_i(x)$.

### G. Préférences sur les résultats et sur les loteries

On va construire la relation de préférences ou de choix entre les loteries. Il est plus simple de travailler avec des fonctions d'utilité. Ceci dit, complication supplémentaire qui apparaît, on distingue deux types d'utilités :

- $u\ (x)$ : déterminées sur des valeurs certaines, sur des valeurs monétaires $x$. C'est la **fonction d'utilité** de Bernoulli, définie sur des résultats, sur l'argent que l'on reçoit dans chacune des loteries. C'est une fonction d'utilité qui n'est pas définie sur des vecteurs de bien mais sur un seul bien qu'est la **monnaie**. C'est un bien dont l'utilité est toujours croissante, toujours monotone, fonction d'une seule variable. Fonction représentée graphiquement dans un plan. C'est une fonction d'utilité classique.
- $U\ (L)$ : représente les **préférences sur ces loteries**, càd si on nous fait choisir entre deux loteries, le consommateur va devoir décider s'il décide la loterie 1 à la loterie 2. Par exemple, on choisit entre une action et une obligation, flux financiers avec des valeurs différentes, des degrés de risque différents. Cette fonction d'utilité va nous dire si on préfère acheter un des deux biens complexes : action ou obligation. Le décideur a des préférences entre les loteries représentées par la fonction $U$. Cette fonction représente les préférences en univers incertain.

- La fonction d'utilité espérance de la richesse

On suppose que $U(L) \ = \ E(L)$

ou encore :

$$U(\mathcal{L}) = \sum_i p_i x_i$$

On va regarder différentes possibilités pour la fonction $U$.

1 è possibilité → ce qui nous intéresse est l'espérance de la loterie, c'est la moyenne, le décideur compare les loteries uniquement en fonction de leurs espérances.

*Exemple* : on a deux loteries, la première nous donné 0 ou 120 avec une proba de ½ à chaque fois.  La deuxième nous donne 45 ou 55 avec proba ½ à chaque fois.

Si on a une utilité "espérance", on doit calculer l'espérance de chaque loterie

$$V(x) = (0-60)^2 \times \frac{1}{2} + (120-60)^2 \times \frac{1}{2} = 60^2$$
$$V(x) = 3600$$

$$V(x') = (45-50)^2 \times \frac{1}{2} + (55-50)^2 \times \frac{1}{2} = 5^2$$
$$V(x') = 25$$

$$U(x) = 60 - 3600k \ ; \ U(x') = 50 - 25k$$

$U(x) > U(x')$ si :

$$60 - 3600k > 50 - 25k$$
$$10 > 3575k$$
$$\boxed{k < \frac{10}{3575}}$$

60 > 50, on choisit $L$ à $L'$. On ne tient pas compte de la variance mais on s'aperçoit qu'il y en a une très risquée ($L$). Si on a un individu qui a de l'aversion au risque, probablement, il préfère la loterie $L'$ à $L$.

- Exemple de choix avec l'utilité espérance

- $\mathcal{L}_1 = (9, 11; 0.5, 0.5)$
- $\mathcal{L}_2 = (8, 12; 0.5, 0.5)$
- $\mathcal{L}_3 = (7, 13; 0.5, 0.5)$

Le décideur est indifférent entre les trois loteries car elles ont toutes la même espérance 10.
La variance n'a aucune importance.

Ce comportement correspond à la neutralité au risque.

- Assurance avec l'utilité espérance

- Avec l'utilité espérance, l'espérance de richesse est donné e par

$$E\mathcal{L} = p((1-\beta)i + (1-p)(I-\beta i) = (1-p)I + (p-\beta)i.$$

- Le décideur choisit de s'assurer totalement ( $i = I$) si $p > \beta$
- Le décideur choisit de ne pas s'assurer ($i = 0$) si $p < \beta$

>

On calcule l'espérance de la loterie.

Quel $i$ va choisir l'individu ?

Dans la réalité, pour que l' assurance puisse fonctionner, il faut absolument que $p < \beta$.

- Paradoxe de Saint Pétersbourg

C'est un problème posé par Nicolas Bernoulli dans une lettre de 1713.

On propose un pari où le parieur reçoit 2 euros si une pièce de monnaie tombe sur pile au premier coup.

Il reçoit 4 euros si la pièce tombe pour la première fois sur pile au second coup..

Il reçoit $2^k$ euros si la pièce tombe pour la première fois sur pile au $k$eme coup..

Combien le parieur est-il prêt à payer pour participer au pari?

Pourtant, l'espérance de la loterie est donnée par

$$\begin{aligned} E\mathcal{L} &= \frac{1}{2}2 + \frac{1}{4}4 + .... + \frac{1}{2^k}2^k + ... \\ &= 1 + 1.... + 1 + ... \\ &= \infty \end{aligned}$$

C'est ce que l'on appelle le paradoxe de Saint-Pétersbourg.

On n'a pas des utilités qui ne dépendent que de l'espérance.

D. Bernoulli propose une solution au problème : l'utilité marginale de l'argent est décroissante, si on est riche, un euro supplémentaire nous rapporte moins d'utilité que si l'on est pauvre. Il faut transformer l'utilité : Von Neumann et Morgenstern.

- La fonction d'utilité de Markowitz

Harry Markowitz (1952) propose une fonction d'utilité qui dépend de l'espérance et de la variance de la loterie :

$$U(\mathcal{L}) = U(E\mathcal{L}, V\mathcal{L}).$$

L'utilité est toujours croissante avec l'espérance :

$$\frac{\partial U}{\partial E} > 0.$$

Si on a une loterie, l'espérance est la probabilité p multipliée par le résultat possible, on fait la somme de chacun des résultats possibles.

La variance mesure la dispersion de la loterie, calcul : une fois l'espérance calculée, pour chacun des résultats, on doit calculer la différence entre ce chiffre et l'espérance de la loterie. Des fois, la différence est négative, donc on met au carré. ensuite, on multiplie par la proba et on somme.

Markowitz était professeur à NY, à l'origine du choix de portefeuille en finance, prix Nobel d'économie. Il écrit la fonction d'utilité d'une loterie uniquement en se servant de l'espérance et de la variance de la loterie en question.

Pour un décideur, on n’a pas besoin de chercher plus loin, il suffit de voir l'espérance et la variance. Plus l’espérance est élevée, plus l’utilité l'est, mais en ce qui concerne la variance, ça dépend. S’il est risquophile (peur du risque élevée), plus de variance sera au détriment de l’utilité.

Si l’individu est riscophobe (aversion pour le risque), $\frac{\partial U}{\partial V} < 0$
Si l’individu est neutre au risque, $\frac{\partial U}{\partial V} = 0$
Si l’individu est riscophile (goût pour le risque), $\frac{\partial U}{\partial V} > 0$
On utilise souvent la représentation linéaire:

$$U(\mathcal{L}) = E\mathcal{L} - kV\mathcal{L},$$

où $k > 0$ mesure l’aversion au risque.

On a un terme négatif devant car plus de variance diminue l'utilité.

Prenons l’exemple de deux loteries :

4/ $\mathcal{X} = (0, 120 ; 0{,}5, 0{,}5)$
$\mathcal{X}' = (45, 55 ; 0{,}5, 0{,}5)$
$E(\mathcal{X}) = 60 > E(\mathcal{X}') = 50.$

- Assurance avec la fonction d’utilité de Markowitz

On calcule:
$E\mathcal{L} = (1-p)I + (p-\beta)i,$

$$\begin{aligned} V\mathcal{L} &= p[(1-\beta)i - [p((1-\beta)i + (1-p)(I-\beta i)]]^2 \\ &\quad +(1-p)[(I-\beta i) - [p((1-\beta)i + (1-p)(I-\beta i)]]^2 \\ &= p(1-p)(I-i)^2 \end{aligned}$$

On a donc:

$$U = (1-p)I + (p-\beta)i - kp(1-p)(I-i)^2.$$

$$\mathcal{L} = (i-\beta i, I-\beta i; p, 1-p)$$

$$(i-\beta i - [p(i-\beta i)+(1-p)(I-\beta i)])^2$$
$$[(i-\beta i)(1-p)-(1-p)(I-\beta i)]^2$$
$$[(1-p)(1-\beta i - I + \beta i)]^2 = (1-p)^2(I-i)^2$$

$$(I-\beta i - [p(i-\beta i)-(1-p)(I-\beta i)])^2$$
$$(p(1-\beta i - I + \beta i))^2 = p^2(1-I)^2$$

$$V\mathcal{L} = p(1-p)^2(I-i)^2 + (1-p)p^2(1-I)^2$$
$$\Leftrightarrow p(1-p)(I-i)^2(1-p+p)$$

La variance ne dépend pas de β.

Quelle est la valeur de $i$ que va choisir l'individu ? Ça va être la valeur de $i$ qui maximise l'utilité.

On suppose $p < \beta$ (sinon l'assureur fait des pertes)
En calculant la dérivée de l'utilité par rapport à $i$,

$$\frac{\partial U}{\partial i} = (p-\beta) + 2kp(1-p)(I-i).$$

La dérivé seconde est donnée par $-2kp(1-p) < 0$.
Donc le choix d'assurance optimal est donné par la condition de premier ordre:

$$i^* = I - \frac{\beta - p}{2kp(1-p)}.$$

$i$ est compris entre $0$ $et$ $I$.

La valeur de $i$ optimale est nettement inférieure à $I$. Il faut vérifier que $i^*$ soit positif, il faut que $k$ soit suffisamment grand (aversion au risque élevée) pour que $i^* > 0$. Plus $k$ est grand, plus la demande d'assurance est grande.

Plus β est grand, plus la demande d'assurance est faible car il mesure le prix de l'assurance choisi par les assureurs.

Si β $= p \rightarrow$ c'est un modèle d'assurance concurrentiel, les compagnies d'assurance ne font pas de bénéfice/profit.

dans le cas où $i * = I$, on demande une assurance totale, on en parlera dans la suite du cours.

$p \rightarrow$ degré de risque, proba du sinistre, si $p$ augmente, cela augmente le numérateur mais diminue aussi le dénominateur.

Le demande d'assurance est plus grande quand l'individu a plus d'inversion au risque ($k$ augmente) et plus petite quand le prix de l'assurance augmente (β augmente).

- Autres fonctions d'utilité

On peut construire beaucoup d'autres fonctions d'utilité des loteries.

Une fonction "pessimiste" $U(\mathcal{L}) = \min x$, le plus petit des résultats

C'est une fonction dans laquelle l'aversion au risque très élevée, ce qui l'intéresse c'est d'obtenir le résultat minimal le plus grand possible.

Une fonction "optimiste" $U(\mathcal{L}) = \max x$, le plus grand des résultats

Une fonction où on ne considère que les valuers les plus grandes et les plus petites (fonction de Hurwicz)

$$U(\mathcal{L}) = \alpha \min x + (1 - \alpha) \max x.$$

- L'utilité espérée

La fonction d'utilité espérée est une réécriture de la formulation de Bernoulli. L'idée c'est que notre fonction d'utilité dans une loterie s'écrira comme une formule :

$$U(\mathcal{L}) = \sum_i p_i u(x_i),$$

où $u(.)$ est une fonction d'utilité sur les résultats, appelée utilité de Bernoulli.

Cette formulation apparaît pour la première fois en 1738 dans la solution du paradoxe de Saint Pétersbourg par Daniel Bernoulli.

- L'utilité de Bernoulli

Bernoulli propose de prendre une fonction $u$ qui soit croissante mais à un taux décroissant (fonction concave) comme la fonction $u(x) = ln(x)$.

On a alors comme quantité maximale que le parieur est prêt à payer :

$$\sum_k \frac{1}{2^k} \ln 2^k = \ln 2 \sum_k \frac{k}{2^k} = 2 \ln 2,$$

une valeur finie !

On peut écrire des préférences sur des loteries grâce à une fonction d'utilité de Neumann et Morgenstern

On cherche à associer une valeur à une loterie, une loterie c'est compliqué car elle est donnée par $x1,\ x2\ \dots$ :

5/ $\mathcal{L}(x_1, x_2, \dots x_N ; p_1, p_2, \dots p_N)$.

$U(\mathcal{L})$ : $U : \mathbb{R}^{(2N-1)} \longrightarrow \mathbb{R}$

Une loterie est un point dans un espace vectoriel de très grande dimension. Une fonction d'utilité associe, à ce vecteur, un nombre qui correspond à la satisfaction du décideur.

- Les axiomes de Von Neumann et Morgenstern

La caractérisation axiomatique de l'utilité espérée est due à Von Neumann et Morgenstern (1944).

Ils se demandent s'il y a une façon optimale de jouer au poker, ils ont mis les bases de la théorie des jeux et de la théorie de la décision.

Ce théorème (présenté dans les 10 premières pages de leur livre) nous dit quels sont les axiomes/conditions sur les préférences qui vont caractériser la fonction d'utilité espérée.

Ils considèrent trois axiomes : on est en termes de préférences sur des loteries.

**Axiome R (Rationalité)** La relation stricte $\succ$ sur $\wp$ est complète et transitive.

Axiome R ⟶ cf rappels du premier cours.

**Axiome C (Continuité)** Soient $p, q, r \in \wp$ tels que $p \succ q \succ r$. Alors il existe $\alpha, \beta \in (0,1)$, tels que $\alpha p + (1-\alpha) r \succ q \succ \beta p + (1-\beta) r$.

Axiome C ⟶ on peut trouver des valeurs ɑ et β comprises entre 0 et 1 qui permettent d'encadrer cette loterie $q$. Quand on a une loterie intermédiaire, on peut toujours la rendre indifférente à une loterie composée des deux loteries extrêmes.

**Axiome I (Indépendance)** La relation de préférence $\succ$ sur $\wp$ satisfait *l'axiome d'indépendance* si pour tout $p, q, r \in \wp$ et tout $\alpha \in (0,1]$, la relation suivante est vérifiée:

$$p \succ q \Leftrightarrow \alpha p + (1-\alpha) r \succ \alpha q + (1-\alpha) r$$

Axiome I ⟶ si on a deux loteries $p$ et $q$ et qu'on souhaite le classement; ce dernier est le même que le classement que l'on ferait si on ajoutait à $p$ et à $q$ la même loterie $r$.

- Le théorème de Von Neumann et Morgenstern

*Une relation de préférence $\succ$ sur l'ensemble $\wp$ des loteries simples sur $X$ satisfait les axiomes R, C and I si et seulement si il existe une fonction qui assigne un nombre réel à chaque résultat, $u : X \to \mathbb{R}$ telle que pour toutes loteries $p, q \in \wp$, on ait:*

$$p \succ q \Leftrightarrow \sum_{x \in X} p(x)u(x) > \sum_{x \in X} q(x)u(x).$$

- Interprétation

Le théorème montre que la fonction d'utilité de Von Neumann et Morgenstern $U(L)$ n'est pas d'une utilité quelconque.

C'est une fonction d'utilité linéaire dans les probabilités, mais où les résultats $x1$,..., $xn$ sont transformés en utilisant une fonction d'utilité $u(.)$.

Le théorème montre que cette forme d'utilité espérée est obtenue sous des axiomes faibles ($R$ et $C$).

Le seul axiome qui peut poser problème est l'axiome d'indépendance.

- Utilité cardinale

Si la fonction $U(L)$ est une fonction d'utilité de VNM, la fonction $f(U(L))$ représente les mêmes préférences si :

- $f(.)$ est une fonction croissante
- $f(U(L))$ est aussi une fonction d'utilité de VNM.

Ces deux conditions ne peuvent être vérifiées que si $f$ est une transformation affine positive :

$$f(U) = aU + b \text{ avec } a > 0.$$

De même pour la fonction de Bernoulli $u$, elle est définie à une transformation affine positive près.

En univers incertain, la notion d'utilité est donc cardinale(et non ordinale).

6) $u(x) = \log x$

$v(x) = 2\log x - 3$

$v(x) \cancel{=} \log(x^2)$

L'une est concave et linéaire, l'autre convexe, représente des différences d'attitude du décideur.

- Application à l'assurance

On reprend le modèle d'assurance en supposant que l'utilité est donnée par l'utilité espérée

$$U(\mathcal{L}) = \sum p_i \ln x_i.$$

On a alors

$$\begin{aligned} U &= p\ln(i(1-\beta)) + (1-p)\ln(I - \beta i) \\ &= p[\ln(1-\beta) + \ln i] + (1-p)\ln(I-\beta i) \end{aligned}$$

En différenciant par rapport à $i$:

$$\frac{p}{i} - \frac{(1-p)\beta}{I - \beta i} = 0$$

On trouve

$$i^* = \frac{pI}{\beta}$$

- Le paradoxe d'Allais (1953)

C'est une critique de la théorie de Vn et M. Il ne croyait pas à l'axiome d'indépendance, il ne reflétait pas le véritable choix des individus. Il montre que si on fait choisir entre deux loteries A et B et C et D (deux fois), de façon naturelle, les décideurs vont choisir une loterie parmi les deux à chaque fois et ces choix contredisent le théorème de Vn et M.

Problème 1: On choisit entre

- A:(2500, 2400, 0; 0.33, 0.66, 0.01)
- B: (2400; 1)
- La plupart des individus choisissent B

Problème 2: On choisit entre

- C: (2500, 0; 0.33, 0.67)
- D: (2400, 0; 0.34, 0.66)
- La plupart des individus choisissent C

1/ $B \succ A \quad u(2400) > 0,33u(2500) + 0,66$
$u(2400) + 0,01u(0).$
$\Leftrightarrow 0,34u(2400) > 0,33u(2500) + 0,01u(0).$

$C \succ D : 0,33u(2500) + 0,67u(0) > 0,34\,u$
$(2400) + 0,66u(0)$
$\Leftrightarrow 0,33u(2500) + 0,01u(0) > 0,34u(2400)$

loterie B → pas de risque, on gagne à tous les coups.
loterie A → risque de 1%. Crainte suffisamment grande pour que la plupart préfèrent B à A.

Loteries C et D → la différence de probabilité n'est pas très importante, les individus sont plus sensibles au fait que le gain soit plus élevé en C. Dans une situation de risque, les individus préfèrent choisir le gain le plus important même si la situation est plus risquée.

Problème : on ne peut pas avoir une fonction d'espérance d'utilité, quand on préfère B à A.

Ces choix sont incohérents avec une utilité espérée:
Dans le problème 1 si B est préféré à A,

$$u(\$2,400) > 0.33u(\$2,500) + 0.66u(\$2,400),$$

$$0.34u(\$2,400) > 0.33u(\$2,500).$$

Dans le problème 2 si C est préféré à D,

$$0.34u(\$2,400) < 0.33u(\$2,500).$$

Paradoxe d'Allais réflexion : quel est le problème du décideur ici ? Sa réponse consiste à modifier les probabilités, mais aussi l'utilité. Une probabilité de 100% est différente de 99%, il y a une différence entre avoir quelque chose avec certitude et quelque chose avec 99%. Il propose de transformer les gains mais aussi de transformer les proba à partir d'une fonction (cf théoriciens de la décision).

- Le paradoxe d'Ellsberg

Dans ce paradoxe l'ambiguïté compte. On a deux urnes, l'une contient 50 boules rouges et 50 boules noires, l'autre 100 boules soit rouges soit noires.

Dans la première, on connaît la distribution, pas dans la 2è.

Deux problèmes :

- Problème 1 : la plupart choisissent le pari 1 plutôt que le pari 2 .
- Problème 2 : on préfère le pari 1 dont on connaît la distribution de probabilités.

Incohérent car on pense que la probabilité d'une boule rouge dans l'urne 2 est inférieure à 50% et la probabilité d'une boule noire dans l'urne 2 est aussi inférieure à 50%. Si on préfère R1 à R2, on doit préférer N2 à N1.

Il y a une aversion à l'ambiguïté, les gens n'aiment pas les situations dans lesquelles ils ne connaissent pas la distribution de probas.

C'est l'incertitude sur la distribution qui pose problème.