Macroéconomie : Croissance

Partie 2 : La croissance endogène

Cours du 25.10

On va parler de modèles qui ne sont pas tout à fait des modèles de croissance endogène. Ce sont des modèles qui apparaissent dans les années 1960 et vont servir de base pour construire les modèles de croissance endogène dans les années 70-80.

Chapitre 1 : Épargne endogène et croissance optimale

Quelque chose qui était exogène dans le modèle de solow qui va devenir endogène dans ce modèle : c'est la variable s.

Dans le modèle de Solow, le comportement des travailleurs n'est pas optimisateur, il obéit à des règles simples (offre son travail, épargne 20% de son revenu, consomme 80% de son revenu). Il n'y a pas de problème d'optimisation sous contrainte chez Solow. On dit qu'il n'y a pas de micro fondement du comportement des travailleurs. Ce dernier n 'est pas justifié à partir de la microéconomie. En revanche, dans le modèle de Solow, le comportement de l'entreprise est basé sur la microéconomie, elle choisit la combinaison de facteur-travail qui maximise son profit.

Dans les modèles de croissance optimale, s va devenir endogène. C'est une approche néoclassique, on s'appuie sur la microéconomie. On veut essayer d'expliquer le comportement d'épargne/consommation des travailleurs à partir d'une optimisation sous contraintes.

Comme dans le modèle de Solow, les prix s'ajustent parfaitement. Et comme les consommateurs/travailleurs maximisent leur utilité, on va se poser la question de l'optimalité des comportements. On peut se demander si l'équilibre est optimal au sens de Pareto.

Dans le modèle de Solow, on n'était pas à l'optimum de Pareto la plupart du temps car l'épargne était exogène. Le taux d'épargne est fixé tel qu'elle, sauf pour une valeur très précise du taux d'épargne, on est pas au maximum de consommation.

S’il est trop petit ou trop grand, on ne consomme pas au maximum.

Si on tient compte du comportement maximisateur des individus, va-t-on avoir un taux d’épargne qui maximise la consommation ?

Il y a une première catégorie de modèle qui remonte aux travaux d’un contemporain de Keynes (Ramsey). Il publie un article en 1928 dans lequel il se demande quel niveau d’épargne fixerait un planificateur omniscient. Ce travail est repris et développé dans les années 1960 avec des outils mathématiques nouveaux Koopmans et Cass. Ces derniers vont produire le modèle de croissance optimale.

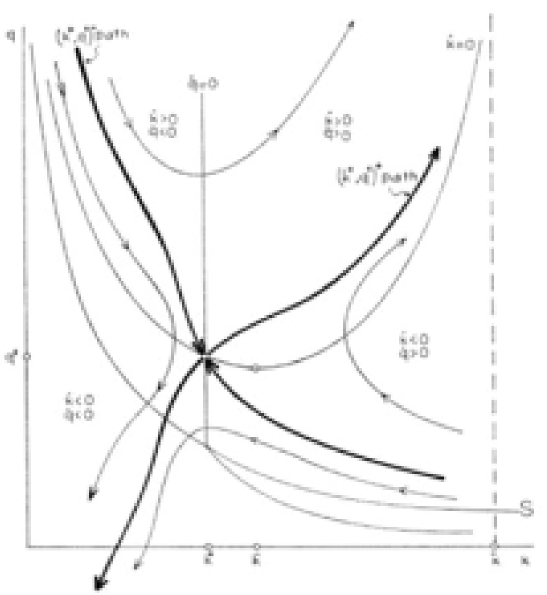


FIGURE 1.—The nature of the solutions to the optimality conditions.

Dans ce modèle, on raisonne en temps continu (comme dans le modèle de Solow), on a un consommateur représentatif.

Problème → Quel est le taux d’épargne approprié ? Une analyse qui fait entrer en jeu les préférences des ménages, càd la fonction d’utilité.
L'objectif est de définir un sentier de croissance qui maximise le bien être de la société.

La même année, on a le modèle de Diamond (1965). On a des ménages qui cherchent à maximiser leur utilité, on a aussi une endogénéisation du taux d’épargne. Mais, dans ce modèle, il y a une différence très forte, il n’y a pas un agent représentatif, on est plus réaliste, il y a des jeunes et des vieux, soit des générations qui se succèdent.

1. **<u>Le modèle de Diamond (1965)</u>**

La question posée par Peter Diamond est la question du choix intertemporel.

On est face à des agents qui vivent deux périodes (*exemple : si on vit 80 ans, la première période dure 40 ans et la seconde 40 ans*).

Une génération représente environ 40 ans.

La question principale est : est-ce que je consomme mon revenu aujourd'hui ou demain ? C'est la question du choix intertemporel.

De quoi va dépendre cet arbitrage ? Dans l'analyse du modèle de Diamond, on va avoir 3 facteurs qui vont entrer en jeu :

- La rentabilité de l'épargne → si j'épargne un euro aujourd'hui ou une unité de biens dans le futur, je vais avoir : mon bien épargné + r.

Si je repousse ma consommation à demain, 1 unité de bien m'en donnera $1 + r$ *du fait de la rentabilité de l'investissement.*

- La préférence pour le présent → on suppose que les individus ont une préférence pour le présent, attendre pour consommer c'est pénible.

Il faut actualiser la consommation future.

Le facteur "ρ*" est le taux d'escompte psychologique, c'est la mesure de la préférence pour le présent. Plus il est grand, plus je préfère consommer aujourd'hui (plus je suis impatient).*

Une unité de demain ne vaut que $1/1 + \rho$ *aujourd'hui compte tenu de ma préférence pour le présent.*

- La préférence pour la variété → c'est le fait que le consommateur préfère avoir un petit peu de roquefort et un petit peu de camembert que manger que du roquefort ou que du camembert.

Ce goût pour la variété se traduit par une forme convexe de la fonction d'utilité.

On va parler de "*lissage*" de la consommation, c'est-à-dire que la convexité des préférences va faire que l'on veut avoir une consommation régulière au cours de notre existence.

Comment ces forces déterminent-elles mon comportement d'épargne et le rythme auquel je décide de faire évoluer ma consommation dans le futur ?

On va introduire une fonction d'utilité, présentée en deux étapes, la fonction d'utilité des ménages si l'horizon est réduit à deux périodes :

$$U = u(c_t) + \frac{u(c_{t+1})}{1+\rho} \qquad u'(c) > 0 \;\; u''(c) < 0 \qquad (1)$$

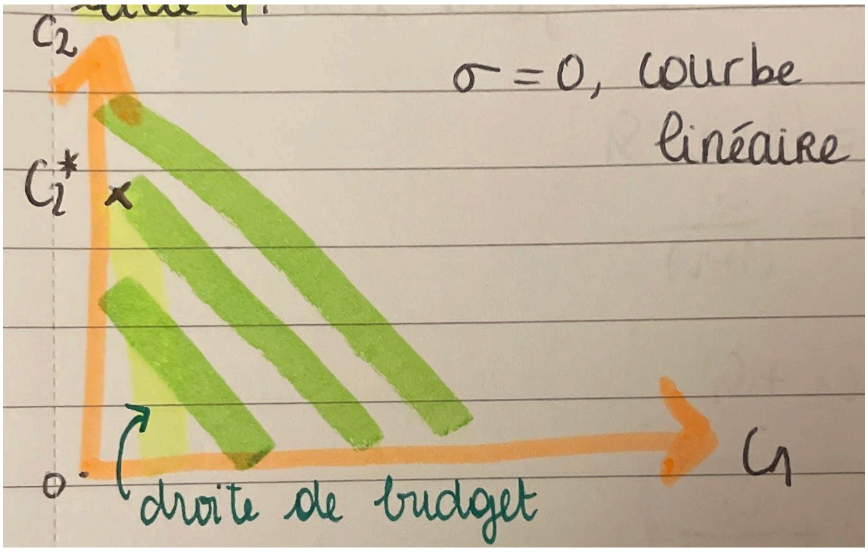
Elle est **additive**, elle est la somme de deux utilités : utilité qui vient de la consommation que l'on ait à la date t (aujourd'hui) et de la consommation de demain $t + 1$. Cette dernière est amoindrie par le fait que l'on est impatient, il y a un *taux d'escompte psychologique* qui entre en jeu.

La fonction u aura une forme du type :

$$u(c_t) = \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} \quad \sigma > 0 \qquad (2)$$

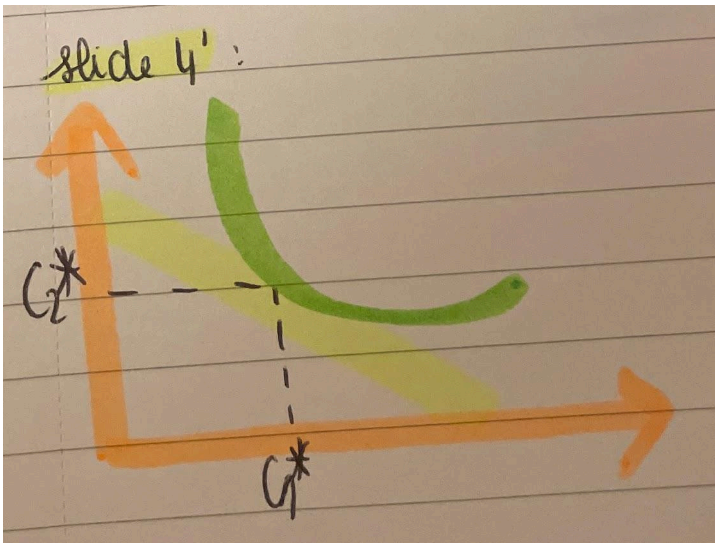
$\sigma \rightarrow$ représente l'*élasticité de substitution intemporelle qui va déterminer la courbure des courbes d'indifférence*.

Si σ = 0 elles sont linéaires. Si σ > 0, elles sont convexes et un goût pour la variété intervient.



On va choisir que demain et on consomme 0 aujourd'hui.

On préfère avoir :



- La condition de Keynes-Ramsey

La contrainte budgétaire est l'élément dans l'analyse qui va faire intervenir la rentabilité de l'épargne.

On a une économie avec des jeunes et des vieux, ils vivent deux périodes (la période de leur jeunesse puis celle de la vieillesse).

La population L peut être séparée en deux $L1$ (jeunes) et $L2$ (vieux).

$L = L_1 + L_2$ agents, jeunes et vieux.

Dans ce modèle, on a une différence avec Solow car l'on est dans un temps direct. Le temps ne s'écoule plus de façon continue.

On travaille quand on est jeune et on ne peut plus travailler quand on est vieux.

Quand on est jeune, on dégage un revenu en travaillant, c'est là qu'on décide combien on épargne.

$$L_{1,t+1} = (1 + n)L_{1,t}$$

Les agents jeunes produisent, épargnent et consomment cette épargne augmentée des intérêts lorsqu'ils sont vieux.

Le comportement des vieux est plus simple, on n'a plus d'avenir donc on va juste consommer tout le revenu dont on peut disposer.

On peut définir la consommation des personnes âgées :

$$c_{2,t} = (1 + r_t)s_{1t-1}$$

C'est une consommation qui dépend de l'épargne possédée à la période précédente ainsi que des intérêts. Les vieux louent leur capital aux jeunes et cela leur permet d'obtenir un revenu du capital.

À partir de là, on peut définir la contrainte des jeunes :

CBt: $w_t = c_{1t} + s_{1t}$
CBt+1: $c_{2t+1} = (1 + r_{t+1})s_{1t}$

L'agent jeune doit se projeter sur deux périodes, le choix à faire aujourd'hui l'engage pour la seconde période, il est confronté à deux contraintes budgétaires :

- une pour la période présente
- une pour la période future

Pour résoudre ce problème, on combine les deux contraintes pour n'en faire qu'une seule, c'est ce que l'on appelle la contrainte budgétaire intertemporelle, on veut faire disparaître le taux d'épargne :

$$w_t = c_{1t} + \frac{c_{2t+1}}{1 + r_{t+1}}$$

Contrainte budgétaire intertemporelle :

$C_2 = (1+r)\, S_1$

$\Rightarrow S_1 = \dfrac{C_2}{(1+r)}$

$W = C_1 + S_1$

$\boxed{W = C_1 + \dfrac{C_2}{(1+r)}}$

Programme d'un « jeune »:

$$L(c_{1t,}c_{2t+1},\lambda) = u(c_{1t}) + \beta u(c_{2t+1}) + \lambda\left[w_t - c_{1t} - \frac{c_{2t+1}}{1+r_{t+1}}\right] \text{ où } \beta = \frac{1}{1+\rho}$$

Conditions d'optimisation et condition Keynes-Ramsey:

(1) $u'^{(c_{1t})} - \lambda = 0$ $\Rightarrow \boldsymbol{u'(c_{2t+1})/u'(c_{1t})}=\frac{\mathbf{1+\rho}}{\mathbf{1+r}}$ [(2)/(1)]

(2) $\beta u'(c_{2t+1}) - \lambda\frac{1}{1+r_{t+1}} = 0$

On peut se demander ce qu'il se passe quand le taux d'intérêt augmente. S'il augmente, le ratio diminue, le ratio à gauche doit diminuer. Sous quelle condition il diminue ? L'utilité marginale de la consommation future doit diminuer et inversement; soit que la consommation future augmente et la consommation présente diminue.

Cours du 8.11

Cela ne nous suffit pas, on doit étudier la croissance dans cette économie, on veut comprendre comment le stock de capital va évoluer au cours du temps et comment on va avoir une croissance de la production et de la consommation.

- Obtention de l'équation dynamique du modèle

Comme dans le modèle de Solow, on veut une équation dynamique, on veut savoir comment varie le stock de capital/tête.
On veut construire une relation entre le capital/tête de la période t+1 et le capital par tête de la période t.

$$K_{t+1} = L_{1t}s_{1t}$$

K à la période t+1 → épargne de tous les agents de la période t. C'est un élément de définition lié aux hypothèses du modèle. On doit avoir en tête le fait que quand on est jeune, on épargne, cela veut dire investir en capital. Quand on est vieux, on loue ce capital aux plus jeunes. Mais, ce capital nous ai rendu. Les jeunes rendent le capital avec des intérêts. Les vieux récupèrent le capital et le consomment. Le capital utilisé dans la période est aussi détruit.

Ce qui fait le capital de la période t+1 c'est uniquement ce que les plus jeunes ont bien voulu mettre de côté à la période t. Le taux d'épargne des jeunes est : $s1t$ multiplié par le nombre d'individus.

$s \rightarrow$ c'est l'épargne, pas la propension à épargner.

On veut le capital par tête, ainsi, on divise par la population active, on a :

$$\frac{K_{t+1}}{L_{1t+1}} = \frac{L_{1t}s_{1t}}{(1+n)L_{1t}}$$

Si on a ça, on peut simplifier, on obtient :

$$k_{t+1} = \frac{s_{1t}(w_t, r_{t+1})}{1+n} \quad (1)$$

Cette fonction d'épargne, l'épargne des travailleurs, c'est pas quelque chose qui est donné mais le fruit du choix intertemporel des consommateurs, cela dépend des prix auxquels sont confrontés les consommateurs. C'est une fonction du taux d'intérêt (prix de l'abstinence) et du salaire (élément de la contrainte budgétaire).

On a en réalité, de façon non explicite, une relation entre $kt + 1$ et kt car dans une économie où les agents optimisent leurs comportements, notamment leurs profits, w et r vont dépendre de k. Les consommateurs ont un calcul d'optimisation intertemporelle et les entreprises cherchent à maximiser leurs profits, on a toujours cette partie du modèle que l'on n'a pas explicité pour l'instant. L'entreprise, dès lors qu'elle fait ses choix, on va avoir salaire = productivité marginale du travail et taux d'intérêt : productivité marginale du capital. On peut donc réécrire w et r en fonction de k.

w est la productivité marginale du travail agrégé et on peut le réécrire comme ceci, de même pour r :

$$w_t = f(k_t) - k_t f'(k_t)$$
$$r_{t+1} = f'(k_{t+1}) - \delta$$

- Application au cas d'une fonction d'utilité logarithmique et fonction de production Cobb-Douglas (comme dans le modèle de Solow):

$$U = lnc_{1t} + \beta lnc_{2t+1}$$

A partir de la condition d'optimisation intertemporelle (Keynes-Ramsey) on obtient :

$$\frac{c_{1t}}{c_{2t+1}} = \frac{1+\rho}{1+r_{t+1}}$$

On a par ailleurs :

$$w_t = c_{1t} + \frac{c_{2t+1}}{1+r_{t+1}}$$

En combinant ces deux équations on obtient :

$$c_{1t} = \left(\frac{1+\rho}{2+\rho}\right) w_t$$

Les fonctions d'utilité à chaque période sont des fonctions logarithmiques.

Une fois que l'on a cette fonction d'utilité, on peut retrouver la condition de Keynes-Ramsey (maximisation de l'utilité intertemporelle).

La fonction de consommation a un aspect particulier, on remarque qu'elle ne dépend pas du taux d'intérêt réel. C'est bizarre puisque le choix intertemporel tourne autour de ce taux d'intérêt réel (je ne mange pas aujourd'hui car si j'investis, mon épargne va être récompensée par mon intérêt). le choix de consommation présent doit être influencé par le taux d'intérêt mais dans le cas particulier de cette fonction, la consommation présente ne dépend pas du taux d'intérêt, et donc l'épargne non plus.

Comment expliquer cela ?

On sait que

$$s_{1t} = w_t - c_{1t}$$

D'où :

$$s_{1t} = \frac{w_t}{2+\rho}$$

Nous avons par ailleurs (voir plus haut):

$$k_{t+1} = \frac{s_{1t}(w_t, r_{t+1})}{1+n}$$

Et

$$w_t = f(k_t) - k_t f'(k_t) = k_t^{\alpha} - \alpha k_t k_t^{\alpha-1} = (1-\alpha)k_t^{\alpha}$$

On peut en déduire le montant à épargner quand un travailleur est jeune, il ne dépend pas du taux d'intérêt.

En termes microéconomiques, cela s'explique par le fait que lorsqu'on choisit entre le camembert et le roquefort, on a un prix relatif. Si ce dernier bouge, notre consommation va changer. Il y a des effets quand les prix varient, que l'on appelle substitution et revenu.

Quand les prix changent, cela change la valeur de nos ressources et le prix relatif, il y a un effet de substitution. La variation du prix relatif est décomposée en un effet de revenu et de substitution. De même pour le taux d'intérêt, pour profiter d'une hausse du taux d'intérêt, on doit remplacer la consommation présente par la consommation future (substitution intertemporelle), l'effet de substitution est dépourvu d'ambiguïté, il nous pousse à épargner plus car on consomme moins aujourd'hui.

Mais quand le taux d'intérêt augmente, il y a aussi un effet revenu, si on maintient notre niveau d'épargne actuel et on en toi chepas à notre niveau de consommation aujourd'hui, la hausse du taux d'intérêt augmente nos ressources intertemporelles, dont on peut disposer sur l'ensemble de notre revenu. En réalité, même sans réduire ma consommation, je vais gagner un revenu du fait de la hausse du taux d'intérêt. Et cela peut nous pousser à consommer plus.

À quelle condition le taux d'intérêt n'a pas d'effet sur la consommation présente ? Lorsque les deux effets sont égaux, ils se compensent/s'annulent. Si un des deux effets l'emporte, on va avoir une influence du taux d'intérêt sur le taux d'épargne. Quand le taux d'intérêt augmente, si l'effet de substitution l'emporte, j'épargne plus et quand l'effet revenu l'emporte, j'épargne moins.

Ici, l'effet de substitution et l'effet de revenu se compensent exactement, c'est pour cela que l'épargne ne dépend que du salaire et du taux de préférence pour le présent (facteur impatience).

On obtient l'équation fondamentale :

Enfin on obtient :

$$\boldsymbol{k_{t+1}} = \left(\frac{\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{n})(\mathbf{2}+\boldsymbol{\rho})}\right)\boldsymbol{k_t^{\alpha}} \quad \text{donc} \quad \boldsymbol{k}^{*} = \left(\frac{\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{n})(\mathbf{2}+\boldsymbol{\rho})}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$k^* = [c]\, k^{*\alpha} \quad \text{avec } c = \frac{1-\alpha}{(1+n)(2+\rho)}$$

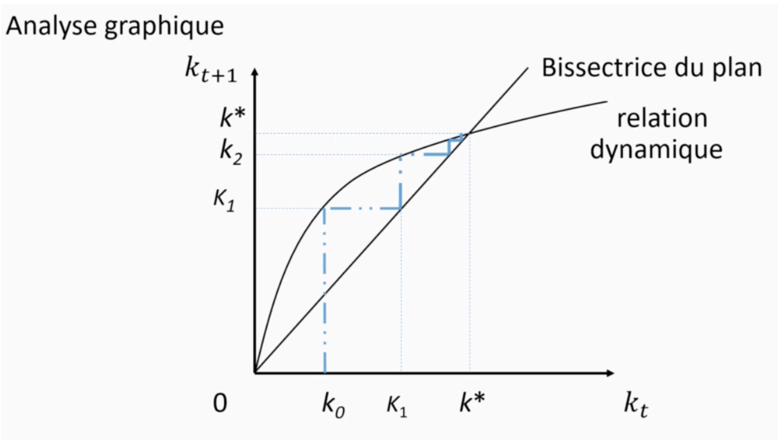
$$\Longrightarrow \frac{k^*}{k^{*\alpha}} = [c]$$

$$\Longrightarrow (k^*)^{1-\alpha} = [c]$$

$$\Longrightarrow k^* = \left(\frac{1-\alpha}{(1+n)(2+\rho)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

On est à l'état stationnaire quand le capital/tête de demain est égal au capital/tête d'aujourd'hui.

A-t-on une dynamique qui converge vers un État stationnaire ?

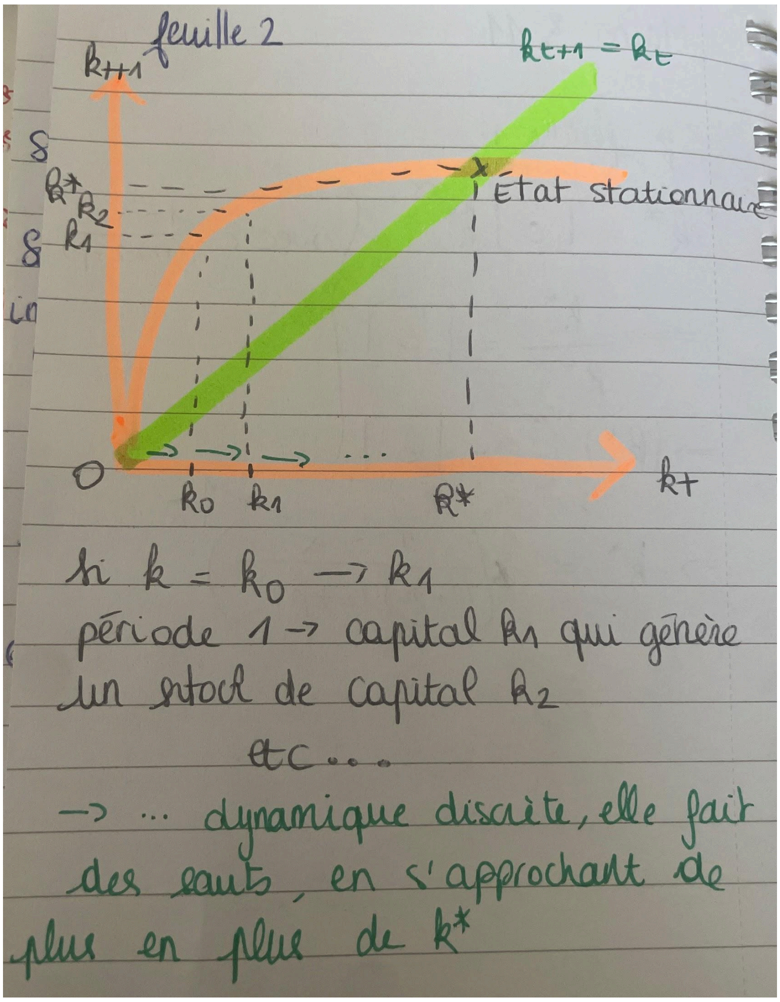


On représente notre équation dynamique fondamentale sur un graphique.

Le capital/tête de demain est une fonction croissante du capital/tête d'aujourd'hui car ɑ est inférieur à 1 et tout le reste est positif. La pente est décroissante.

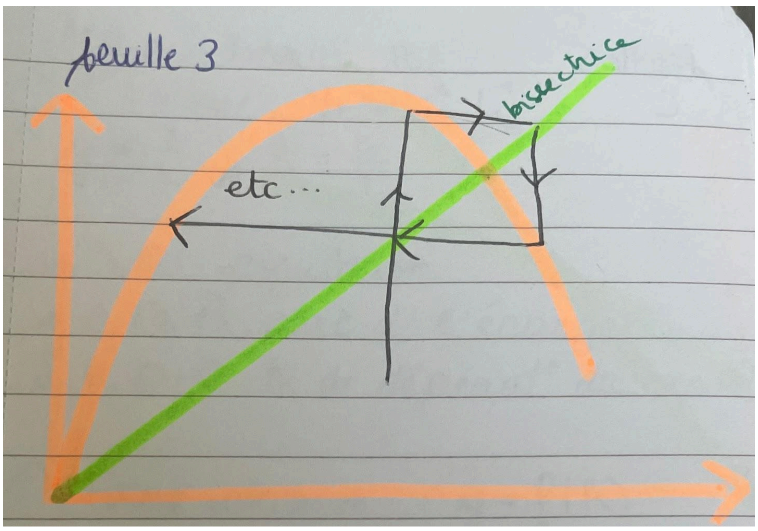
On part de l'origine, la relation est croissante mais la pente est décroissante.

Pour analyser la dynamique, on détermine la bissectrice du plan : $kt + 1 = kt$.



On retrouve dans ce modèle la propriété du modèle de Solow dans lequel on converge vers un État stationnaire.

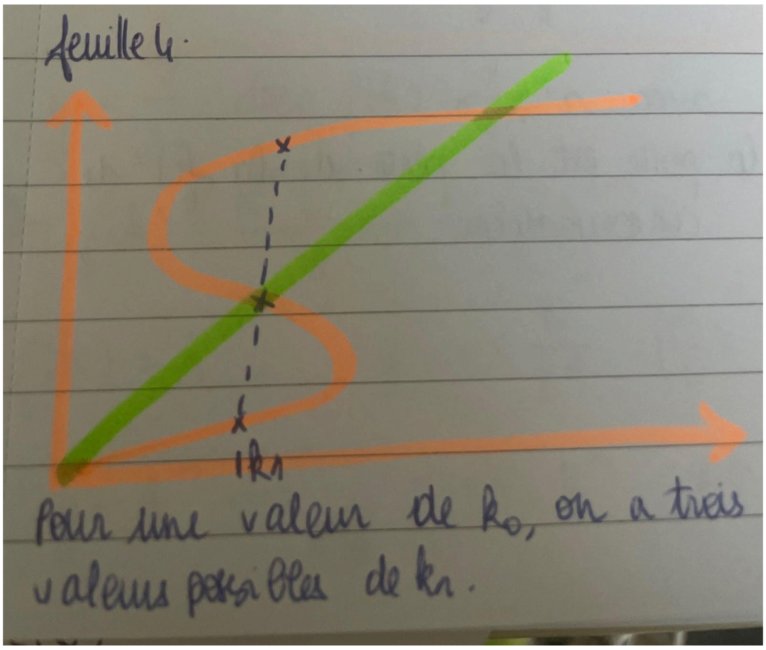
Ce modèle est un modèle dynamique.



On peut avoir des dynamiques qui ne sont pas convergentes.

Selon la fonction d'utilité que l'on choisit, l'effet de substitution et de revenu intertemporel ne vont pas se combiner de la même façon.
On avait pris un cas standard où aucune chose bizarre ne se produit. Ce qui est bizarre c'est le cas où l'effet de revenu l'emporte sur l'effet de substitution. Selon l'hypothèse standard, quand le taux d'intérêt augmente, les gens épargnent plus mais on peut penser qu'ils épargnent moins dans le cas où l'effet revenu l'emporte.

Si on a une fonction comme cela, on a des dynamiques cycliques.



Il y a quelque chose d'encore plus compliqué qui peut toujours émerger selon la forme de la fonction d'utilité que l'on a retenu.

On est dans un modèle avec des équilibres multiples.

Ce type de configuration est utilisé pour penser le cycle, cela montre que dans une économie où on a une structure objective qui est donnée. On a plusieurs équilibres possibles qui dépendent des croyances des agents, les croyances vont être autoréalisatrices, même si elles n'ont pas de base objective. Ce sont des modèles de tâche solaire.

On en reste au cas standard.

- Règle d'or

Le règle d'or ne change pas dans ce modèle. Sur le sentier régulier, le produit disponible pour la consommation est production par tête ($f(k)$) moins l'investissement de point mort. Le maximum de consommation implique donc :

$$f'(k_{or}) = n + \delta \Rightarrow k_{or} = \left(\frac{\alpha}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad \text{(dans notre exemple)}$$

Elle n'est pas modifiée, on retrouve un capital/tête qui est le même que dans le modèle de Solow (avec fonction Cobb-Douglas).

On a changé quelque chose qui est le choix du consommateur qui sous-tend la fonction d'épargne mais on n'a pas changé toute la partie offre de l'économie, on a toujours une entreprise représentative avec une fonction néoclassique. De ce fait, on retrouve une convergence vers un État stationnaire comme dans le modèle de Solow ainsi qu'une règle d'or.

On a quand même une différence, le capital d'état stationnaire existe mais sa valeur n'est pas la même. On fait intervenir les caractéristiques du choix du consommateur, en particulier sa préférence pour le présent.

- Inefficience dynamique

C'est le fait que l'équilibre dynamique du modèle n'est pas forcément optimal au sens de Pareto. On avait ça dans le modèle de Solow, on ne maximise pas la consommation.

Ici, on permet aux travailleurs de faire un choix maximisateur et de choisir le niveau d'épargne qui doit maximiser leur utilité. On peut s'attendre à ce que l'on tombe à quelque chose d'optimal. Or, on constate en réalité, si on regard les deux expressions, les valeurs de k^* et $k$or ne sont pas les mêmes.

$k$or → maximise la consommation.

k^* → à l'équilibre de l'économie.

Il y a donc une inefficience dynamique.

Prenons un exemple, si les travailleurs jeunes décident de trop épargner, $k^* > k$or. n a une suraccumulation de capital. On n'épargne pas trop, la consommation n'est pas à son maximum. Dans ce cas, l'État peut intervenir en taxant les jeunes, le stock de capital à l'équilibre peut être rapproché du niveau de la règle d'or. L'argent que l'on prend aux jeunes est redonné aux vieux. Les jeunes vont être contraints d'épargner moins et en même temps, les vieux consomment (donc hausse de la consommation).

Cela ressemble à un système de retraite par répartition. Dans ce modèle, sous certaines conditions, si on k^* > $k$or, un régime de retraite par répartition est quelque chose peut nous emmener à l'optimum de Pareto et améliorer l'efficacité de l'économie.

Si on est dans le cas inverse, on a une sous accumulation, les individus jeunes consomment trop, il faut faire l'inverse pour les forcer à épargner plus.

Il y a une inefficience dynamique dans cette économie. Les prix sont parfaitement flexibles et les marchés parfaitement concurrentiels mais ce modèle d'équilibre général toujours au plein-emploi n'est pas optimal du fait de la conséquence de la structure générationnelle du modèle. On a des générations d'agents qui se succèdent, cela crée un problème qui explique l'inefficacité de l'économie.

Cette structure de génération imbriquée pose problème car elle interdit certains échanges. C'est ce que l'on appelle un système de marché incomplet. Certains échanges sont rendus impossibles par cette structure.

Il y a une autre solution que de taxer les jeunes, les vieux empruntent aux jeunes afin de consommer plus et les jeunes épargnent moins car ils sauraient que lors de leur vieillesse, ils pourront à leur tour emprunter aux jeunes. On a un marché de la dette qui réduirait la nécessité d'épargner. En revanche, ici ce n'est pas possible car les jeunes n'ont pas intérêt à prêter aux vieux en raison du saut de période. Si les vieux sont morts, ils ne peuvent pas rembourser, d'où le fait que ça ne marche pas avec cette structure.

On pourrait imaginer que ce qui rendrait le système parfait c'est avoir deux catégories de jeunes.

C'est ça qui est derrière le problème. Cela a pour conséquence qu'un système de retraite par répartition est quelque chose d'utile.

2. <u>Le modèle de Ramsey-Cass-Koopmans</u>

- Description brève de l'économie du modèle

C'est le modèle socle des théories de la croissance que l'on va étudier par la suite. Ce modèle est le modèle socle de toute la macroéconomie depuis les années 1970. IS-LM a disparu depuis les années 1970 au profit de ce modèle et des modèles qui s'en sont inspirés.

C'est une économie à durée de vie infinie avec un bien unique.

On fait disparaître la structure générationnelle. On a des ménages à durée de vie infinie, il n'y a plus de générations et la taille des ménages s'accroît au taux n.

Dans cette économie-là, on a un système de marché complet. Leur capacité d'anticipation est parfaite.

On fait des hypothèses sur les préférences des ménages qui permettent de traiter l'ensemble des individus comme un ménage représentatif, on va faire comme s'il avait toutes les ressources de l'économie à sa disposition.

Comme dans le modèle de Diamond, le côté offre est toujours le même que celui du modèle de Solow.

- Conditions d'obtention d'un agent représentatif.

✓Préférences des ménages identiques et TMS homogènes de degré zéro par rapport aux consommations.

⇒L'échange n'est pas motivé par l'hétérogénéité des préférences mais par l'hétérogénéité des dotations.

✓Illustration: cas d'un arbitrage simple entre consommation présente et future

Soit $U(c_1, c_2) = \alpha lnc_1 + \beta lnc_2 \qquad \alpha, \beta > 0$

Alors $TMS_{2/1} = \frac{\delta U/\delta C_1}{\delta U/\delta C_2} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{C_2}{C_1}$

Cette fonction d'utilité conduit à des TMS homogènes de degré zéro par rapport à C1 et C2. Multiplier C1 et C2 par une constante ne modifie pas le TMS!

Tous les agents sont traités comme un seul agent représentatif. Pour arriver à cela, on doit faire des hypothèses particulières, on doit supposer qu'ils ont tous des préférences identiques.

Mais, cela ne suffit pas, il faut aussi faire une hypothèse sur la structure des préférences. Elles conduisent à des TMS homogènes de degré zéro par rapport aux consommations (ou préférences homothétiques).

Cela ne veut pas dire que tous les agents sont parfaitement pareil, il y a des agents qui ont peu de ressources et d'autres beaucoup.Mais, nos préférences sont identiques et homothétiques.

Quel que soit notre niveau de ressources, pour un niveau des prix donné, tout le monde va vouloir la même structure de consommation à travers le temps. Le rapport entre la consommation d'aujourd'hui et la consommation de demain sera le même pour tout le monde quel que soit le niveau de richesse.

Est-ce une hypothèse raisonnable ? C'est une hypothèse forte, cela veut dire que si on arbitre entre le vin et les cigarettes et des choses “utiles”, si on consomme 50 euros(avec un salaire de 500 euros) de vin/cigarettes mais si on est multimilliardaires, on consomme toujours 10% de notre revenu en vin et cigarettes, soit 1 milliard, c’est énorme.

On est face à un modèle d’équilibre général; simplifié, dans un modèle non simplifié où on autorise le fait que les agents soient différents, on peut avoir un modèle de multiplicité d'équilibres, il y a des équilibres qui sont instables, c'est le bazar. On veut un modèle avec un seul équilibre stable. Ces hypothèses ont pour avantage d’avoir des fonctions de demande de bonne forme avec un équilibre unique et stable. Si on introduit de l’hétérogénéité, ça peut devenir plus compliqué.

Cela implique aussi que la préférence pour le présent est la même pour tous.

- Conséquences à l’équilibre général

A l’EG, les TMS des différences ménages sont égaux au prix relatif de C1 et C2 => la structure intertemporelle de leurs consommations (ou le ratio C1/C2) va être la même pour tous les agents.

Ex: $\frac{u\prime(c_1^i)}{u\prime(c_2^i)} = \frac{u\prime(c_1^j)}{u\prime(c_2^j)}$

On utilise la propriété d’homogénéité pour montrer que

$$\frac{c_1^i}{c_2^i} = \frac{c_1^j}{c_2^j} \Rightarrow \frac{c_1^i}{c_2^i} = \frac{\sum_{i=1}^{L} c_1^i}{\sum_{i=1}^{L} c_2^i} = \frac{\Omega_1}{\Omega_2}$$

Il est possible de faire comme si le prix relatif d’équilibre était égal au TMS d’un agent représentatif qui consommerait la totalité des dotations de l’économie.

- Le programme de l’agent représentatif dans le modèle de croissance optimal

Programme:

$$Max\ V = \int_0^{\infty} u(c_t) e^{-(\rho - n)t} dt \ \text{ où } \ \rho > n$$

$$\text{Sous} \begin{cases} \dot{k}_t = f(k_t) - c_t - (n+\delta)k_t \\ k_0 \ donné \end{cases}$$

Condition de Keynes-Ramsey ou équation d’Euler (solution dérivée à partir du principe du maximum de Pontryagin):

$\frac{\dot{c}}{c} = \sigma(c)(r_t - \rho)$ où $\sigma(c) = -\frac{u\prime(c)}{cu\prime\prime(c)}$ (élasticité de substitution intertemporelle)

On doit réécrire le programme de consommation de l’agent. On re-bascule en temps continu. L’agent maximise une fonction d'utilité v qui est une intégrale qui comprend la fonction u, une fonction instantanée. Mon utilité est la somme de l’utilité de mes consommations sur l'ensemble de ma vie.Il faut tenir compte que le nombre d'individus augmente, d'où n en exposant.

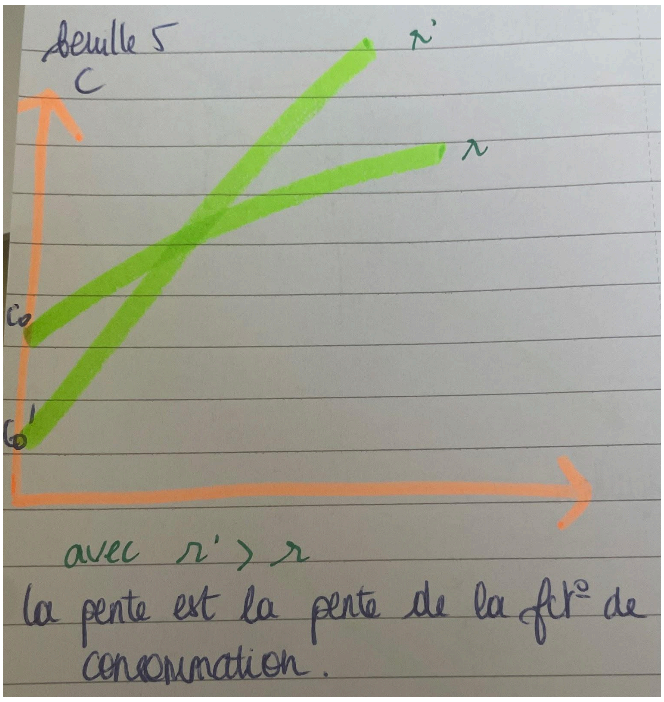
On cherche à maximiser cette utilité, sous la base de deux contraintes :

- un certain stock de capital qui nous ai donné
- équation dynamique fondamentale qui est le fruit du côté offre du modèle.

Ce problème est un problème d'optimisation dynamique avec des maths que l'on n'a pas encore appris, on ne peut pas le résoudre mais si on le résout, on obtient une condition Keynes-Ramsey ou équation d'Euler.

On retrouve l'équation d'Euler que l'on avait dans le modèle de Diamond.

Le taux de croissance de la consommation va nous dire la trajectoire de notre consommation au cours du temps et à quelle vitesse. Cette trajectoire dépend à nouveau du taux d'intérêt et du taux de préférence pour le présent. Si le taux d'intérêt augmente, j'ai intérêt à épargner davantage. La consommation va augmenter davantage, la consommation future augmente relativement à la consommation actuelle. Ma trajectoire de consommation pivote.



- L'analyse dynamique à partir du diagramme de phases

Dans le modèle de Solow, toute la dynamique se résume à l'analyse de l'équation dynamique fondamentale.

Désormais, il y a un choix qui est opéré et reflété dans la condition d’Euler. On se retrouve avec un système de deux équations dynamiques à analyser.

Le système dynamique:

$$\begin{cases} \dot{k}_t = f(k_t) - c_t - (n+\delta)k_t \\ \dfrac{\dot{c}}{c} = \sigma(c)(r_t - \rho) \end{cases}$$

Solution stationnaire:

$$\begin{cases} f(k_t *) = c_t * + (n+\delta)k_t * \\ r = \rho \quad ou \quad f'(k_t *) = \rho + \delta \end{cases}$$

La seconde ligne est la règle d’or modifiée. Comme $\rho > n$ le k^* est ici inférieur au *kor* du modèle de Solow.

On fait intervenir la consommation dans l’épargne.

L’ensemble des couples (ocnosmmatio, capital/tête) font que le capital/tête ne bouge pas,il est stable.De la même façon, quand pour que la consommation ne bouge pas, le taux d'intérêt doit être égal à notre préférence pour le présent. Et dans ce cas, le capital/tête ne variera pas.

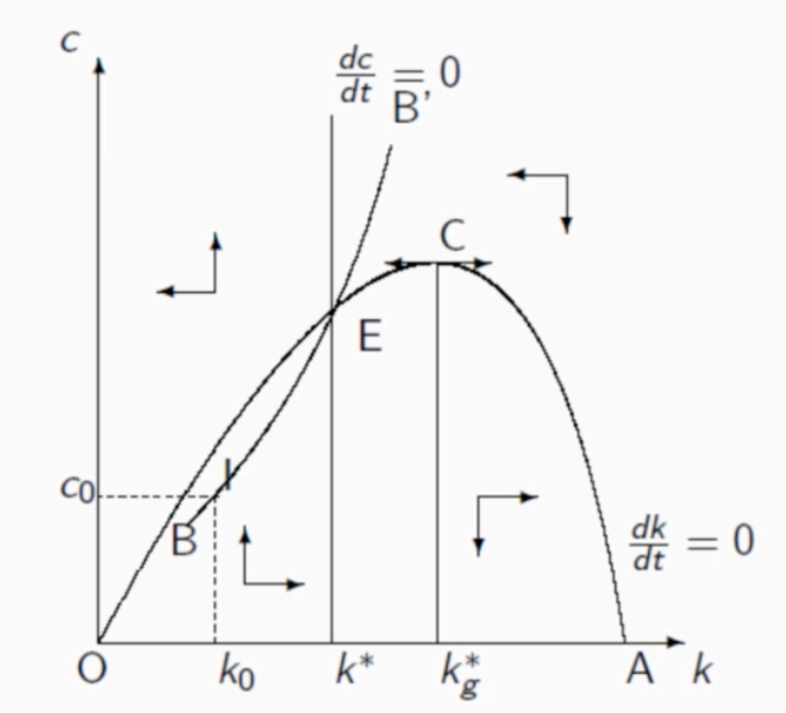


FIG.: Le diagramme de phases

La dynamique de ce modèle est composée uniquement de deux équations que l’on peut résumer dans un graphique à deux dimensions.
On a une relation croissante puis décroissante entre le capital/tête et la consommation, d’où

la courbe en cloche. En tout point de cette courbe en cloche, le capital/tête ne bouge pas. On peut représenter sur ce graphique l'ensemble des points pour lesquels la consommation ne bouge pas.

Au point E, on retrouve l'état stationnaire. La consommation ne bouge pas et de même pour le capital/tête.

La question est de savoir si : est-ce qu'il y a un phénomène de convergence ? Selon la région du plan que l'on a, on a un mouvement différent (voir flèches).

On peut montrer qu'il y a une droite particulière et si on est dessus, on converge vers E.

Le ménage représentatif, si on lui donne une dotation $k0$, il a une consommation $c0$ et va toujours se situer sur cette droite-là. La rationalité de ce ménage représentatif fait que l'économie va toujours converger vers E. On retrouve la convergence du modèle de Solow.

- Bilan : les propriétés générales du modèle de croissance optimale

On a un modèle dans lequel on endogénéise le choix d'épargner en supposant un agent représentatif avec une durée de vie infinie. Cet agent fait un choix intertemporel. Dans ce modèle, on retrouve la conclusion fondamentale du modèle de Solow. Le moteur de la croissance est le progrès technique. Le point d'équilibre intertemporel est un point d'état stationnaire, on peut introduire un facteur A.

Au point E, on retrouve les conclusions du modèle de Solow : une croissance à long terme du revenu par tête soutenue par le seul progrès technique et pas de croissance sans progrès technique.

Le capital/tête à l'État stationnaire est inférieur au modèle de Solow du fait de l'introduction de la préférence pour le présent des agents.

On a une nouveauté, l'optimalité de E au sens de Pareto. La trajectoire de croissance à long terme est optimale. Tout écart implique une perte de bien être. E maximise l'utilité des consommateurs et on peut vérifier que c'est le point qui correspond au maximum de consommation. On a une règle d'or modifiée qui est vérifiée, on a un maximum de consommation désiré par les travailleurs. Comme les agents sont impatients, le maximum de consommation n'est pas le maximum absolu. On a quelque chose qui permet de discuter des politiques en termes de bien être.

Est-ce un modèle normatif avec des hypothèses plus fortes que le modèle de Solow ? On l'a enrichi par rapport au modèle de Solow puisqu'on a expliqué l'épargne, ceci étant, pour que le modèle reste maniable, on introduit des hypothèses fortes qui soutiennent l'agent représentatif.