**Microéconomie : Incertain et information**

# Chapitre 7 (partie 1) : Aléa moral

Du fait même que l'on est assuré, cela change notre comportement.
*Exemple : assurance contre incendie, on commence à fumer dans la maison.*
Il faut anticiper le fait que les agents économiques vont avoir des comportements à l'encontre de ce que les assurances préfèrent.

les premiers modèles des années 70's. On a voulu expliquer beaucoup de comportements avec ces modèles.

## Le modèle principal-agent

L'agent principal est celui qui choisit le contrat. Il réagit au contrat principal et choisit soit une action soit un message (averse au risque).

Le principal a  le pouvoir de négociation et propose un contrat (neutre vis-à-vis du risque).

Ce sont aussi des modèles de contrat, développés principalement par deux économistes français.

Historiquement, le premier modèle écrit de contrat est dû à Stiglitz en 1971, contexte de contrat agricole.
Contrat de  fermage → contrat agricole où on est fermier mais on ne possède pas la terre sur laquelle on travaille, on doit payer le propriétaire terrien. Dans ce contrat, on le paie avec un montant fixe. Il y a d'autres contrats dans lesquels on paye en fonction de la récolte.

Stiglitz explique pourquoi ces contrats sont utiles, en particulier celui qui donne un % de la récolte, il permet de garantir que le fermier fera tous les efforts nécessaires pour cultiver sa terre.

Ce contrat est un principal-agent où le principal est le propriétaire terrien et l'agent le fermier.

Il y a beaucoup de situations qui peuvent s'établir sous cette forme.

## Exemples de relations entre un principal et un agent

La **théorie de la firme** est fondée sur l'idée qu'il y a une séparation entre les ***actionnaires/managers*** de la firme. Les objectifs sont souvent différents car l'actionnaire cherche à maximiser les dividendes qu'il reçoit ou maximiser la valeur de l'entreprise. Les investissements que veut faire un actionnaire sont souvent de long terme. L'actionnaire cherche à vendre à grands prix, quitte à vendre moins d'unités. Ce sont des objectifs de valeur. En revanche, les managers ont des objectifs différents. *Par exemple, utiliser l'avion de l'entreprise, les activités de luxe de l'entreprise*. Cela consiste à détourner une partie des profits de l'entreprise pour leur propre profit. On dit aussi que les managers (*Peugeot, Renault*), avaient pour objectif non pas d'avoir le profit le plus élevé mais d'avoir des ventes plus élevées que leurs concurrents. Cet objectif n'est pas le même que l'objectif de création de valeur.

**Propriétaire terrien/Fermier** → voir plus haut Stiglitz.

**Assureur/assuré** → l'assureur ne voit pas quel est le comportement de l'assuré. Ce dernier peut adopter un comportement au détriment de l'assureur.

**Employeur/employé** → l'employeur va offrir un contrat de travail et l'employé va prendre le contrat de travail et choisir lui-même le niveau d'effort (*exemple : professeurs de fac*).

**Agence de régulation/entreprise qu'elle régule**→ Cela concerne un certain nombre de secteurs de l'économie (*exemples : entreprises en réseau*), qui sont des situations dans lesquelles on a une seule entreprise présente sur le marché (*monopole naturel, coût fixe de réseau très élevé*). Les autorités de régulation doivent fixer les prix, doivent donner des guides pour fixer les prix. On voudrait donner des incitations pour ses entreprises de se comporter d'une façon optimale. L'autorité étant le principal, elle essaie d'induire un certain comportement à ses entreprises.

**Information asymétrique**

On a deux façons de voir les modèles de PA.

- action cachée : aléa moral
- information cachée : sélection adverse (voir chapitre 8).

**Modèle de base**

On prend l'exemple de la relation employé/employeur. La mission de l'employé est de vendre le bien de l'entreprise. On va payer un commercial de deux façons :

- salaire fixe
- commission sur les ventes réalisées.

Le résultat est noté $x$ et observé par les deux parties.

L'agent choisit un niveau d'effort $e$. Ce niveau d'effort peut être le fait de ne pas se réveiller le matin.

Si le résultat était déterministe, càd une relation directe qui dit que en fonction de ce niveau d'effort, voici le résultat que j'obtiens, on n'aurait pas eu de problème car le principal peut déduire du résultat le niveau d'effort.

Mais, on a toujours un aléa, cela va impacter le résultat. Quel que soit le niveau d'effort, il est possible d'avoir un résultat faible (ou inversement).

Cette relation probabiliste va être au cœur du problème d'aléa moral. On a toujours de l'incertitude : *si la récolte est bonne, je ne sais pas si c'est parce que le fermier a bien travaillé ou bien s'il y avait des conditions climatiques favorables.*

Les résultats sont classés dans l'ordre: $x_1 < x_2 < ..., x_n$
$\Pr[x = x_i] = p_i(e)$. On suppose que $p_i(e) > 0$ pour tout $i, e$

La DST de premier ordre va apparaître.
Si on a deux niveaux d'efforts, on va avoir une distribution qui avantage les résultats élevés.

**Utilités**
Le versement est réalisé de la part du principal vers l'agent,c'est un salaire noté $w$ qui est observable par tous. Il dépend du niveau de résultat.

Le principal s'intéresse à la différence entre le résultat et le salaire.
Son utilité est donnée par $B(x - w)$ avec $B' > 0$ et $B'' < 0$.
*On supposera souvent $B'' = 0$: le principal est neutre au risque*
L'utilité de l'agent est séparable dans le niveau d'effort et le salaire

$$u(w, e) = u(w) - v(e),$$

avec $u' > 0, u'' < 0, v' > 0, v'' > 0$.

L'employeur peut être neutre ou averse mais on fait l'hypothèse qu'il est neutre car si on est un grand employeur avec beaucoup d'employés. La loi des grands nombres va jouer, même s'il y a un accident dans un atelier, cet accident va être résorbé par des chocs positifs dans les autres ateliers.

Or, l'employé n'a qu'une seule source de revenu. Ainsi, il est averse au risque.

L'agent a une utilité ($u\ (w, e)$) qui dépend non pas du résultat mais du salaire et du niveau d'effort qu'il fait.
Le coût de l'effort est une fonction croissante et convexe. Le coût de l'effort marginal est de plus en plus important.

On a un problème car on a un conflit d'intérêt. L'employeur s'intéresse au résultat mais pas l'employé et l'employé se focalise sur le niveau d'effort mais pas l'employeur.

**Utilité de réserve, participation et contrat**

Le modèle a un déroulé fixe. Cela commence par le principal qui offre le contrat qui spécifie le salaire versé en fonction des variables observées (la plupart du temps, le résultat).

Dans un second temps, l'agent accepte ou refuse le contrat. Sion n'a pas cette étape-là, o est dans un modèle d'esclavage où le principal pourrait imposer tout ce qu'il veut.

L'agent a une utilité de réserve :

$$\overline{U}$$

Même s'il ne travaille pas pour l'employeur, il a la possibilité de choisir un autre salaire.

Dans un troisième temps, l'agent choisit son niveau d'effort.

Enfin, les résultats sont obtenus, le salaire est payé à l'agent.

**Contrats avec information symétrique**

On regarde ce qu'il passe quand le principal observe le niveau d'effort fourni par l'agent.
Si on peut observer le niveau d'effort, le salaire va pouvoir dépendre du niveau d'effort.

Un contrat spécifie à la fois le paiement $w(x_i)$ et le niveau d'effort $e$ pour maximiser

$$\sum_i p_i(e)B(x_i - w(x_i)),$$

sous la contrainte

$$\sum p_i(e)u(w(x_i)) - v(e) \geq \overline{U}.$$

Cette contrainte est appelée la *contrainte de participation* de l'agent.

L'objectif du principal est de maximiser sa fonction $B\ (xi,\ w)$.

La contrainte de participation → elle doit être respectée car l'employé a la possibilité de refuser le contrat. Espérance de salaire qu'option l'employé - coût de l'effort > utilité de réserve.

Utilité de réserve ⟶ s’il choisit de travailler ailleurs.

Cette contrainte garantit qu’on ne peut pas exploiter l’agent.

**Partage du risque optimal**

On écrit le Lagrangien

$$\mathcal{L} = \sum_i p_i(e)B(x_i - w(x_i)) + \lambda[\overline{U} - (\sum p_i(e)u(w(x_i)) - v(e))],$$

Soit $e$ fixé. Pour tout $x_i$, le salaire $w(x_i)$ est choisi pour maximiser le Lagrangien:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w(x_i)} = -p_i(e)B'(x_i - w(x_i)) + \lambda p_i(e)u'(w(x_i)) = 0.$$

Ainsi pour tout $x_i$,

$$\frac{B'(x_i - w(x_i))}{u'(w(x_i))} = \lambda.$$

*Partage du risque optimal: les utilités marginales du principal et de l’agent sont égales*

$$\frac{B'(x_1)}{u(x_1)} = \lambda = \frac{B'(x_2)}{u(x_2)}.$$

$$\frac{B'(x_1)}{B'(x_2)} = \frac{u'(x_1)}{u'(x_2)}.$$

λ ⟶ quel que soit le niveau de résultat $xi$ obtenu, on a le même résultat. C’est le principe d’assurance optimale, qlq soit le résultat, on a les mêmes utilités marginales.

Si je regarde l’utilité marginale de chacun des agents dans chacun des états de la nature, la différence entre les utilités marginales va être la même : chacun des agents a le même ratio d’utilité marginale pour chacun des états de la nature.

Si l’employeur est neutre au risque, alors le salaire optimal va toujours être le même. ‘

**Principal, agent neutres au risque**

Si l’agent est neutre au risque :

Si P est neutre au risque, $B'$ est une constante, donc $U'(w(x_i))$ est une constante, $w(x_1) = w(x_2) = ...w(x_n)$

L'agent reçoit un *salaire fixe*

Si A est neutre au risque, $u'$ est constant donc $B'(x_i - w(x_i))$ est constant ie $x_i - w(x_i)$ est une constante

L'agent reçoit un salaire $x_i - k$. Ceci est équivalent à une *franchise fixe* payée au principal

Si P et A sont tous les deux neutres au risque, le contrat optimal est compliqué. Si A et P ont tous les deux une aversion au risque constante, le contrat optimal est linéaire:

$$w(x_i) = a + bx_i.$$

## Choix d'effort optimal

On suppose que P est neutre au risque. Soit $w$ le salaire fixe.
Pour tout $e$, le salaire est donné par la contrainte de participation

$$w = u^{-1}(\overline{U} + v(e)).$$

et l'objectif du principal est

$$\sum_i p_i(e)x_i - u^{-1}(\overline{U} + v(e)),$$

Cette fonction n'est pas nécessairement concave en $e$
Si elle est concave en $e$, la solution est donnée par

$$\sum_i p_i'(e) - {u^{-1}}'(\overline{U} + v(e))v'(e).$$

③ Principal neutre au risque :
le salaire w ne dépend pas du résultat.
Utilité agent : $u(w) - v(e) = \bar{U}$

On ne va jamais laisser une rente à l'agent, on va toujours faire en sorte que l'agent soit au niveau de son utilité de réserve. Pour chaque niveau d'effort, on a un seul salaire qui va assurer cette égalité.

On peut aussi utiliser la fonction inverse :

$$u(w) - v(e) = \bar{U}$$
$$u(w) = \bar{u} + v(e)$$
$$w = u^{-1}(\bar{u} + v(e))$$

## Aléa moral

Quand on a une situation d'information symétrique, c'est assez simple d'écrire le modèle général.

Dans le cas (inverse) d'un modèle d'aléa moral, le niveau d'effort n'est pas observable par le principal.

*Exemple : la récolte est observée mais pas l'effort du fermier.La survenance d'un accident est observée mais pas le comportement du conducteur.*

## Contrainte d'incitation

Si on veut choisir le niveau d'emploi $e$ *, il faut que le salarié préfère ce niveau d'effort que n'importe quel autre niveau effort.

Le salaire ne peut dépendre que de ce que les deux parties observent.

En plus de la contrainte de participation, on doit maintenant tenir compte de la *contrainte d'incitation*

Si P veut implémenter le niveau d'effort $e^*$ il faut que

$$\sum p_i(e^*)u(W(x_i)) - v(e^*) \geq \sum p_i(e)u(W(x_i)) - v(e) \forall e,$$

Si il n'y a que deux niveaux d'effort, la contrainte est facile à écrire

Si il y a un grand nombre de niveaux d'effort, la contrainte devient difficile à écrire!

## Deux niveaux d'effort, deux résultats

On suppose deux niveaux d'effort, $e^H$ et $e^L$ avec des coûts $v(e^H) = c^H > c^L = v(e^L)$

Il y a deux résultats possibles $x_1 < x_2$ et les probabilités sont données par

| | $x^H$ | $x^L$ |
|---|---|---|
| $e^H$ | $p^H$ | $p^L$ |
| $e^L$ | $q^H$ | $q^L$ |

avec $p^H > q^H$, $p^H + p^L = 1$, $q^H + q^L = 1$

$H \rightarrow$ niveau d'effort élevé.

On a que deux niveaux de récolte notés $x1,\ x2$.

$PH \rightarrow$ probabilité quand le niveau d'effort est élevé que le résultat soit élevé.

On a une dominance stochastique : $PH\ >\ QH$. Si je fournis un niveau d'effort élevé ça va être plus coûteux mais cela va induire des résultats meilleurs au sens de la dominance stochastique.

## Contraintes de participation et d'incitation

On suppose que P veut implémenter le haut niveau d'effort

La contrainte de participation est:

$$p^H u(w_H) + p^L u(w^L) - c^H \geq \overline{U},$$

La contrainte d'incitation est

$$p^H u(w_H) + p^L u(w^L) - c^H \geq q^H u(w_H) + q^L u(w_L) - c^L.$$

ou

$$(p^H - q^H)u(w^H) + (p^L - q^L)u(w^L) \geq (c^H - c^L).$$

Si je donne un salaire fixe, qui est le même que la récolte soit élevée ou faible, alors jamais l'agent n'acceptera de fournir un niveau d'effort élevé (car le coût est plus élevé). On doit différencier les salaires selon le niveau de récolte.

C'est en jouant sur cette différence de salaire que je vais pouvoir l'inciter à faire des efforts (*exemple : commission*).

Il n'est pas certain qu'il soit optimal pour le principal de demander un niveau d'effort élevé. On doit calculer les contrats optimaux.

Le contrat incitatif est le contrat $eH$.

La contrainte de participation → en tant qu'employé, je préfère être employé par cette entreprise plutôt que de démissionner.

(5)

$$p^H u(w^H) + p^L u(w^L) \geq \bar{u} + c^H$$

$$\underbrace{(p^H - q^H)}_{\Delta ST} u(w^H) - \underbrace{(q^L - p^L)}_{\Delta ST} u(w^L) \geq c^H - c^L$$

$$p^H u(w^H) = \bar{u} + c^H - p^L u(w^L).$$

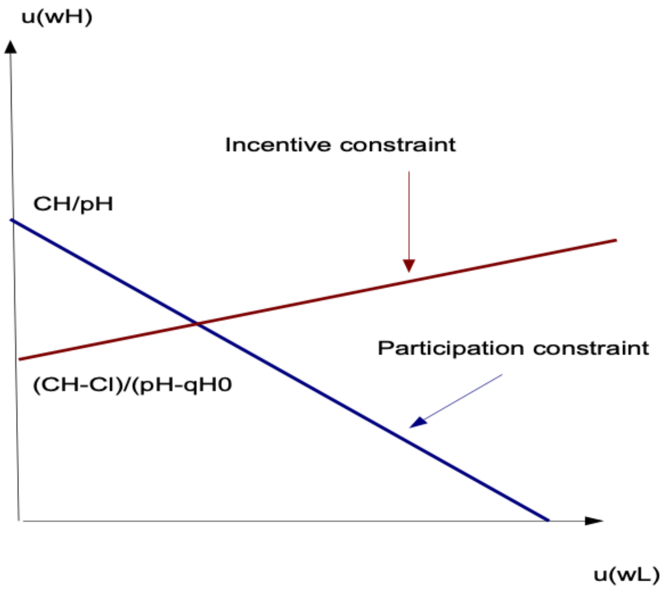
→ décroissante

Si le salaire $wH$ augmente, le salaire $wL$ baisse, d'où une droite décroissante.

$$(p^H - q^H) u(w^H) = (q^L - p^L) u(w^L) + (c^H - c^L).$$

Si on sert un salaire $wL$ élevé, il faudra pour que la contrainte de participation soit vérifiée, il faut que $wH$ augmente. D'où une droite croissante.

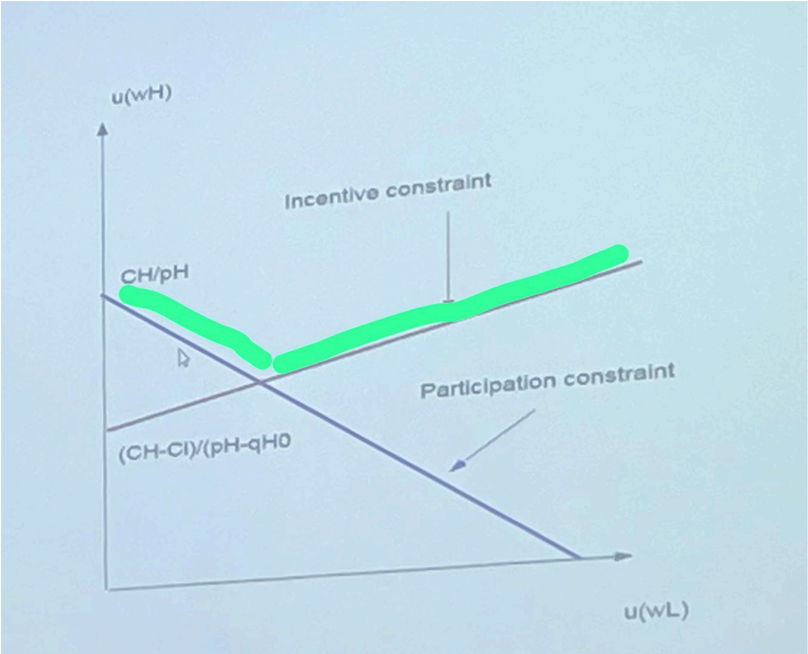
L'écart donne une incitation à travailler dur.




⇒ La droite décroissante → contrainte de participation. Il faut que le niveau de salaire soit suffisamment élevé, on doit être au-dessus de la droite bleue sinon les niveaux de salaire sont trop faibles, le travailleur préfèrera donc travailler ailleurs que dans notre entreprise.
⇒ La droite croissante → on doit créer un écart entre les deux salaires suffisamment élevé pour qu'on se place en-dessous de la droite rouge.

Pour que les deux contraintes soient satisfaites, on doit être entre les deux droites (à droite).

L'objectif de l'entreprise est de minimiser les salaires, sur la droite rouge, les seuls salaires imaginables sont ceux qui se situent dans l'enveloppe :



(7) $B : p^H (x^H - w^H) + p^L (x^L - w^L)$

$v(x_H) = \sqrt{x_H}$ ; $v(x_L) = \sqrt{x_L}$

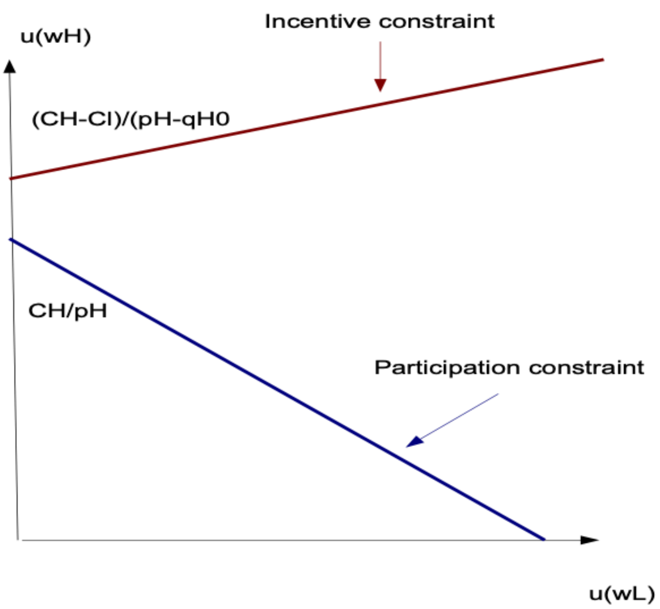
$\Rightarrow B : p^H (x_H - t_H^2) + p^L (x_L - t_L^2)$

$t_L = u(x_L)$ et $t_H = u(x_H)$

Les courbes d'indifférence vont être des cercles, elle va être la plus élevée possible quand les deux niveaux de salaire sont égaux à 0.

$p^H t^H + p^L t^L = \bar{u} + c^H$

↳ contrainte de participation.




On peut aussi se retrouver dans des situations où les paramètres diffèrent.
SI la rouge commence au-dessus de la droite bleu, on sait où est le point qui correspond aux contraintes incitatives ⇒ on doit juste être au-dessus de la droite rouge.

On verse un salaire de 0 (ordonnée à l'origine).

L'agent obtient une utilité plus élevée que s'il était parti travailler ailleurs. L'agent extrait une rente alors que si on est dans la situation du schéma précédent, il va toujours choisir un point sur sa contrainte de participation, il n'aura aucune rente (car il obtient son utilité de réserve).

## Le profit du principal

Le principal maximise son profit:

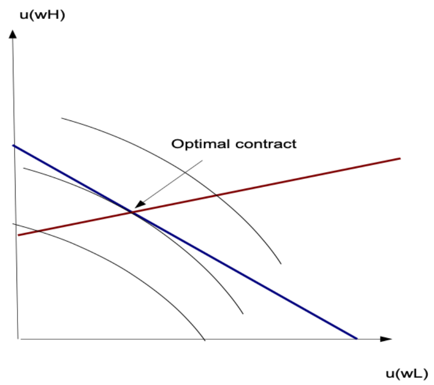
$$p^H(x^H - w^H) + p^L(x^L - w^L).$$

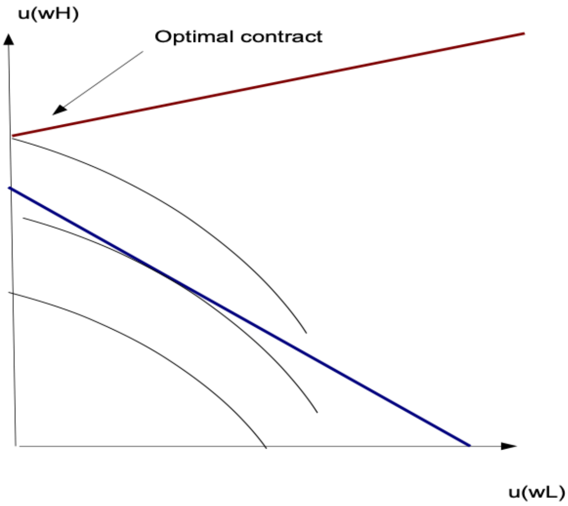
On trace les courbes iso-profit:

$$p^H(x^H - w^H) + p^L(x^L - w^L) = \pi.$$

Ces courbes sont décroissantes dans l'espace $(u(w^H), u(w^L))$ et augmentent en direction du sud-ouest.

## Le contrat optimal






**Interprétation**

Le contrat optimal est toujours sur la contrainte d'incitation.

Selon la valeur des paramètres, l'agent peut être réduit ou non à son utilité de réserve.

**Solution mathématique**

Le Lagrangien est

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= p^H(x^H - w^H) + p^L(x^L - w^L) \\ &+ \lambda(\overline{U} - (p^H u(w_H) + p^L u(w^L) - c^H) \\ &+ \mu((c^H - c^L) - (p^H - q^H)u(w^H) + (p^L - q^L)u(w^L))\end{aligned}$$

La solution est donnée par

$$\begin{aligned}1 - \lambda u'(w^H) - \mu(1 - \frac{q^H}{p^H})u'(w^H) &= 0, \\ 1 - \lambda u'(w^L) - \mu(1 - \frac{q^L}{p^L})u'(w^L) &= 0,\end{aligned}$$

**Interprétation de la solution**

Comme $\mu \neq 0$, le salaire optimal *n'est pas constant*, $w^H \neq w^L$

En fait, comme $\frac{q^H}{p^H} \leq \frac{q^L}{p^L}$, $w^H > w^L$.

**Un exemple**

On suppose $x^L = 0$, $x^H = 20$, $p^H = \frac{1}{2}$, $q^H = \frac{1}{4}$, $c^L = 0$, $c^H = \frac{1}{2}$

On suppose $u(w) = \sqrt{w}$, $\overline{U} = \frac{1}{2}$

Contrainte de participation:

$$\sqrt{w_H} + \sqrt{w_L} \geq 2,$$

Contrainte d'incitation:

$$\sqrt{w_H} = \sqrt{w_L} + 2.$$

9) $p^H u(w^H) + p^L u(w^L) - c^H \geq \bar{u}$

$\frac{1}{2}\sqrt{w_H} + \frac{1}{2}\sqrt{w_L} - \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$

$\sqrt{w^H} + \sqrt{w^L} \geq 2$

Contrainte d'incitation:

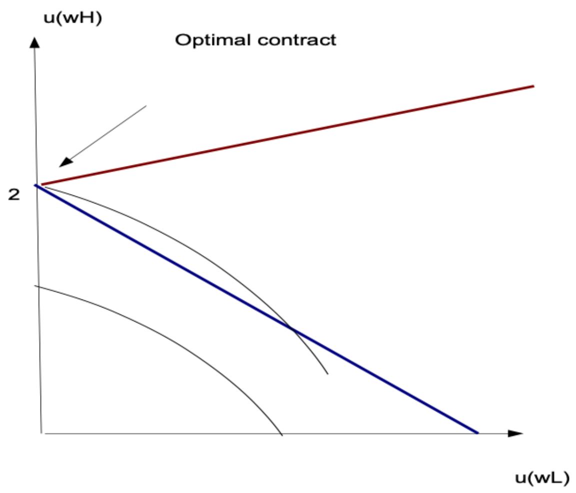
$p^H u(w^H) + p^L u(w^L) - c^H \geq q^H u(w^H) +$

$q^L u(w^L) - c^L$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{w^H} + \frac{1}{2}\sqrt{w^L} - \frac{1}{2} \geq \frac{1}{4}\sqrt{w^H} + \frac{3}{4}\sqrt{w^L}$

$\sqrt{w^H} - \sqrt{w_L} \geq 2.$

**Contrat optimal**



Au contrat optimal, $w^H = 4$, $w^L = 0$.
Le profit de P est donné par $\frac{1}{2}(20 - 4) = 8$
Si P demande à A de fournir le niveau d'effort $e^L$, la contrainte de participation donne

$$\frac{1}{4}\sqrt{w_H} + \frac{3}{4}\sqrt{w_L} = \frac{1}{2}.$$

Comme $w_H = w_L$, le salaire est $w = \frac{1}{4}$, et l'espérance de profit

$$\frac{20}{4} - \frac{1}{4} = \frac{19}{4} < 8,$$

si bien que le niveau d'effort optimal est bien $e^H$.

## Effort continu

Si le niveau d'effort est continu, la contrainte d'incitation est remplacée par la condition de premier ordre, qui dit que l'agent choisit le niveau d'effort $e^*$:

$$\sum_i p_i'(e^*)u(w(x_i)) - v'(e^*) = 0.$$

Cette approche n'est valide que si l'utilité de l'agent est concave en $e$ – ce qui dépend du contrat et n'est pas toujours vérifié.
Remplaçant dans le Lagrangien, on trouve la solution

$$\frac{1}{u'(w(x_i))} = \lambda + \mu \frac{p_i'(e)}{p_i(e)}.$$

28.11

→ voir feuille correction

# Chapitre 7 (partie 2) : Sélection adverse

## Sélection adverse

C'est le principe selon lequel on a une **information connue par l'agent mais pas par le principal**. Il va dissimuler une information dont il dispose.

SI on veut faire un prêt pour acheter une maison, on va nous proposer une assurance qui dit que si on décède, elle paie à notre place la banque le reste. Ce sont des assurances dans lesquelles on a besoin de faire des prises de sang, examens médicaux…Ceux qui ont eu des cancers, souvent, n'arrivent pas à obtenir ce type d'assurance car elles refusent.

Employeur et employé → l'employé connaît sa productivité

Prix discriminants → on a deux types de consommateurs, ceux qui ont une demande élevée et d'autres une demande faible. Dans la plupart des cas, le prix est un prix fixe mais dans la réalité, ce n'est pas comme cela que ça se passe. Les entreprises en situation de monopole vont essayer de différencier les prix en fonction de chacun des consommateurs même si, en principe, c'est illégal. Il y a trois types de discrimination :

- *Premier ordre :* prix différents selon les consommateurs (exemples : services de conseil en entreprises, le consultant devine le montant qu'une entreprise est prête à payer).

⇒ dans la réalité, le prix est fixe par heure ou par jour.

- *Troisième ordre :* segmenter le marché, quand on a des tarifs particuliers pour les étudiants. Cela se fait sur la base d'une caractéristique observable (exemple : on nous demande notre carte étudiante au cinéma).

⇒ on va vouloir segmenter les marchés et choisir des prix différents selon les élasticités de la demande.

- *Second ordre :* on n'est pas capable en regardant le consommateur de savoir s'il a une demande élevée ou faible. On lui offre un menu avec différentes options, on sait que les consommateurs vont se sélectionner eux-mêmes. Par exemple, les garanties que Darty nous demande pour tester notre aversion au risque ou discrimination par les prix des billets d'avion. Les compagnies aériennes américaines faisaient du surbooking assez souvent, on est passés d'un modèle de surbooking à un modèle où on fixe la capacité de façon très rigide et on vend les billets en ayant différentes catégories de billets).

⇒ C'est celle qui va nous intéresser.

Régulation → on a une compagnie d'électricité et un régulateur, on choisit le prix de vente d' EDF. Le problème c'est que pour fixer ce prix, on a des règles assez compliquées qui tiennent compte de la demande, du coût des entreprises, du prix des énergies. On a besoin du coût de l'entreprise. Elles ont toujours intérêt à dire qu'elles ont un coût élevé car le **prix de vente augmente avec le coût**. L'entreprise prétend avoir des coûts plus élevés. Le **principal** est le **régulateur** et **l'agent** est l'**entreprise régulée** qui connaît ses coûts.

## Modèle employeur-employé

Comme premier exemple, on analyse un modèle où P est un employeur et A est un employé. La productivité de A n'est connue que de A.

P choisit des contrats spécifiant le niveau d'effort et le salaire pour distinguer les différents types d'employés.

## Types d'employés

Il existe deux types d'employés:

- Les "bons" employés (G) ont une productivité élevée. Cette productivité se traduit par un coût d'effort qui est faible, $c(e) = v(e)$.
- Les "mauvais" employés (B) une productivité faible. Cette productivité se traduit par un coût d'effort qui est élevé, $c(e) = kv(e)$ avec $k > 1$.
- La proportion de "bons" types est $p$, celle des "mauvais" $1 - p$.

## Profit de l'employeur

L'employeur a une fonction de profit qui dépend de l'effort, $\Pi(e)$, une fonction croissant et concave..

L'employeur propose un contraint $(e, w)$ qui spécifie le niveau d'effort et le salaire pour maximiser $\Pi(e) - w$.

Le profit final de l'employeur est donc

$$\Pi(e) - w.$$

## Utilité de l'employé

L'employé a une fonction d'utilité du salaire , $u(w)$ croissante et concave

Il doit aussi supporter le coût de l'effort, $c(e)$, croissante e convexe.

Son utilité est donc égale à

$$u(w) - c(e).$$

## La contrainte de participation

On suppose que l'employé a une utilité de réserve (fondée sur une activité dans un autre secteur ou avec un autre employeur) égale à $\underline{U}$.

Pour que l'employé accepte le contrat il faut donc qu'il reçoive une utilité au moins égale à $U$.

**Contrainte de participation:**

$$u(w) - c(e) \geq \underline{U}.$$

Elle va être à nouveau calculée de la même façon que dans le cadre de l'aléa moral. Si L'employé refuse mon contrat, il peut obtenir un nouveau d'utilité ubarre → niveau d'utilité qu'il obtient s'il travaille chez quelqu'un d'autre ou s'il ne travaille pas du tout.

## Contrat optimal en information symétrique

En information symétrique, P et A observent tous les deux la productivité de l'employé.
P offre donc deux contrats $(w^G, e^G)$ et $(w^B, e^B)$ aux employés de type $G$ et $B$.
Ces contrats sont choisis pour maximiser le profit

$$\Pi(e) - w$$

sous la contrainte de participation

$$u(w) - c(e) \geq \underline{U}.$$

On peut déterminer si l'employé est un employé G ou un employé B (exemple : par leur diplôme…).

Le salaire entre toujours en négatif chez l'employé, on va toujours avoir une contrainte de participation qui est satisfaite avec égalité.

## Contrat pour les types G

Pour les types $G$, $c(e) = v(e)$.
On écrit le Lagrangien:

$$\mathcal{L} = \Pi(e) - w + \lambda(u(w) - v(e) - \underline{U}).$$

En dérivant par rapport à $e, w, \lambda$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e} &= \Pi'(e) - \lambda v'(e) = 0, \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} &= -1 + \lambda u'(w) = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= \underline{U} - u(w) + v(e) = 0.
\end{aligned}$$

Le contrat pour les types $G$ satisfait

$$\begin{aligned}
u(w^G) - v(e^G) &= \underline{U}, \\
\Pi'(e^G) &= \frac{v'(e^G)}{u'(w^G)}
\end{aligned}$$

*Interprétation* → $\Pi'(eG)$ → utilité marginale pour le principal de fournir un niveau d'effort supplémentaire. Si l'agent fournit un niveau d'effort supplémentaire, profit marginal de

l'employeur égal à Π′. C'est le bénéfice marginal d'augmenter le niveau d'effort du travail.
$v'(eG)$ → coût d'effort pour le travailleur calculé en unité de salaire (en euros)

C'est une contrainte d'optimalité.

Il faut que bénéfice > coût (ou égal mais pas <).

Cette équation nous dit que, comme la contrainte budgétaire, on sait en fonction du niveau d'utilité de réserve, exactement où on se place.

## Contrat pour les types B

Pour les types $G$, $c(e) = kv(e)$.
On écrit le Lagrangien:

$$\mathcal{L} = \Pi(e) - w + \lambda(u(w) - kv(e) - \underline{U}).$$

En dérivant par rapport à $e, w, \lambda$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e} &= \Pi'(e) - \lambda k v'(e) = 0, \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} &= -1 + \lambda u'(w) = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= \underline{U} - u(w) + kv(e) = 0.
\end{aligned}$$

On demande un niveau d'effort moindre que pour les travailleurs G.

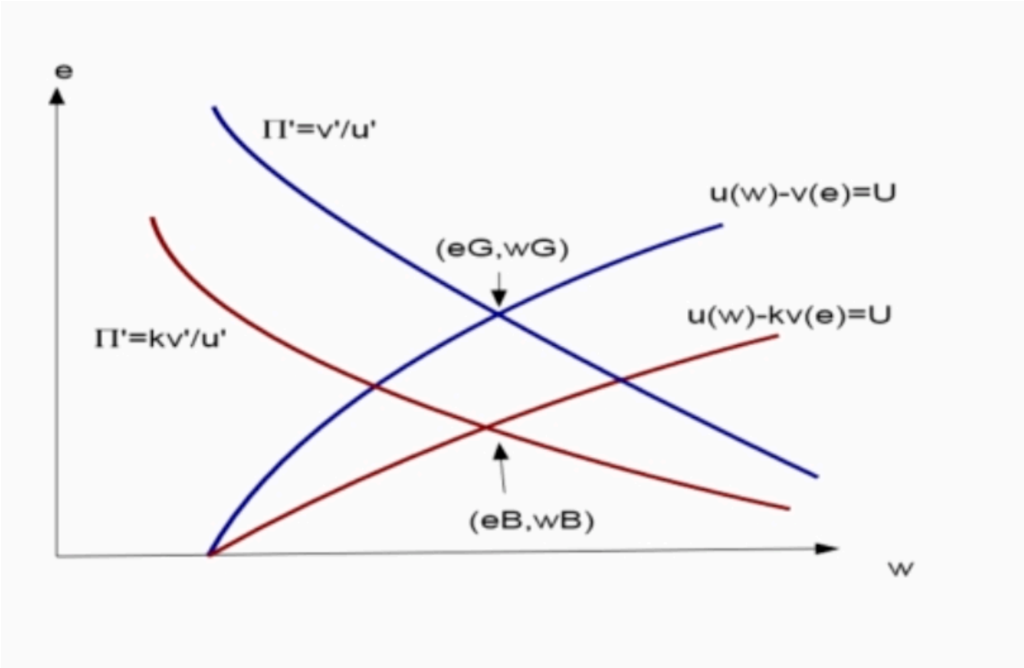
Erreur slide → "Pour les **types B**"

Le contrat pour les types $B$ satisfait

$$\begin{aligned}
u(w^B) - kv(e^B) &= \underline{U}, \\
\Pi'(e^B) &= \frac{kv'(e^B)}{u'(w^B)}
\end{aligned}$$

Le coût a augmenté. Le niveau d'effort optimal est plus bas pour les travailleurs B.

## Le contrat optimal




Il nous montre où sont les choix optimaux pour les deux types de travailleurs.

On a les objectifs (niveau d'effort) et le salaire.

Les deux courbes croissantes sont les courbes d'indifférence des travailleurs. $w$ est un bien mais $e$ est un mal, les courbes d'indifférence du travailleur dans un espace où on a un bien et du mal sont toujours croissantes (exemple : pollution/argent, si la pollution augmente, pour me rendre indifférent il faut qu'on me donne plus d'argent).

Si on a deux biens, les courbes sont décroissantes.

Si j'augmente le niveau d'effort, il faut que mon salaire augmente pour que je sois indifférent.

Pour un niveau d'effort, l'argent qui me rendra indifférent sera plus élevé pour la courbe rouge que pour la courbe bleu car un travailleur qui a un niveau de productivité faible demande une plus grande compensation.

$\frac{\pi'}{v'} = \frac{1}{u'}$

$w\uparrow$, $u'\downarrow$, $\frac{1}{u'}\uparrow$ donc $\frac{\pi'}{v'}$ doit $\uparrow$

$\pi'$ est concave donc si $e\downarrow$ $\frac{\pi'}{v'}\uparrow$

quand on $\uparrow w$, on doit $\downarrow e$

Si on regarde les points d'intersection (contrats optimaux) ⟶ Point rouge pour les B et point bleu pour les G.

On a un niveau d'effort plus élevé pour G que pour B mais en termes de salaire, ce n'est pas clair.

**Le contrat avec information asymétrique**

Si P ne connaît pas les types des agents, le menu de contrats $(w^B, e^B)$ et $(w^G, e^G)$ ne permettra pas de filtrer les agents:

- Les types B choisiront bien $(w^B, e^B)$
- Mais les types G choisiront aussi $(w^B, e^B)$ qui conduit à une utilité plus éleveé que $(w^G, e^G)$

On va vouloir offrir des contrats que les agents vont eux-mêmes choisir de façon optimale.

On ne va pas pouvoir leur offrir les deux contrats $eG,\ wG$ et $eB,\ wB$ car si on ne connaît pas le type des agents, ils vont choisir le contrat qui leur plaît le mieux.

Les agents G vont préférer le contrat $eB,\ wB$ au contrat $eG,\ wG$ ⇒ on a un salaire plus élevé ou un niveau d'effort plus faible.

Si je suis un agent de type élevé, qui a une productivité élevée, dans ce cas-là, c'est lui qui va vouloir imiter les agents qui ont une productivité moins élevée. Si on ne connaît pas les types des agents, et que l'on offre les deux menus, tous les agents vont choisir le même menu : $eB,\ wB$ .

**Les contraintes d'incitation**

Quand le principal offre deux contrats $(w^G, e^G)$ et $(w^B, e^B)$, il doit vérifier que les agents $G$ choisissent le contrat qui leur est destiné, $(w^G, e^G)$ et que les agents $B$ choisissent le contrat qui leur est destiné, $(w^B, e^B)$.

Ce sont les deux **contraintes d'incitation**:

- $u(w^G) - v(e^G) \geq u(w^B) - v(e^B)$ (IG)
- $u(w^B) - kv(e^B) \geq u(w^G) - kv(e^G)$ (IB)

Il faut que je rende le contrat $eB,\ wB$ moins intéressant pour les agents B (baisser le niveau de salaire, …) ⟶ contraintes d'incitation. Elles ne sont pas exactement identiques à celles que l'on a dans le contexte d'aléa moral.

Ici, la contrainte d'incitation est la suivante ⇒ L'agent G préfère le contrat qui lui est destiné à l'agent qui est destiné à l'agent B. Et ce dernier préfère le contrat qui lui est destiné par rapport à celui qui est destiné à l'agent G.

Les agents ont un $k$ qui signifie qu'ils ont un coût d'effort plus élevé.

On a deux contraintes d'incitation et deux contraintes de participation (une pour les agents de type G et une pour les agents de type B) alors que dans le contexte d'aléa moral, on en avait seulement une de chaque, c'est pour le niveau d'effort élevé.

## Le problème du principal

Le principal maximise
$p(\Pi(e^G) - w^G) + (1-p)(\Pi(e^B) - w^B)$ sous les contraintes

- $u(w^G) - v(e^G) \geq \underline{U}$ (PG)
- $u(w^B) - kv(e^B) \geq \underline{U}$ (PB)
- $u(w^G) - v(e^G) \geq u(w^B) - v(e^B)$ (IG)
- $u(w^B) - kv(e^B) \geq u(w^G) - kv(e^G)$ (IB)

2 contraintes d'incitation et 2 contraintes de participation.

Sur ces 4, il n'y en a que deux qui vont être importantes ⟶ contrainte de participation des agents de type B et contrainte d'incitation des agents de type G.

Quand on résout un problème de sélection adverse, on utilise la contrainte PB et IG. Elles vont nous permettre de nous débarrasser des salaires et d'écrire tout en termes d'efforts.

## La contrainte de participation (PG) n'est jamais saturée

On peut l'ignorer car si les autres sont satisfaites, elle le sera aussi.

$$\begin{aligned} u(w^G) - v(e^G) &\geq u(w^B) - v(e^B) \text{ par IG.} \\ &> u(w^B) - kv(e^B) \text{ parce que. } k > 1 \\ &\geq \underline{U} \text{ par PB} \end{aligned}$$

Cet argument montre que la contrainte de participation du "bon" type n'est jamais saturée et peut être ignorée.

Si la contrainte de participation des agents de type B est satisfaite et si la contrainte d'incitation des agents de type G est satisfaite, alors la contrainte de participation des agents de type G est satisfaite.

**Rente informationnelle** ⟶ certains agents vont pouvoir profiter du fait qu'ils ont une certaine **information** qui n'est pas connue du principal. Cela me permet d'exploiter le fait de posséder cette information, l’asymétrie d'information se fait au profit de l’agent qui a l’information.

## Les “bons” agents choisissent un effort plus élevé

En utilisant les deux contraintes d’incitation, on trouve

$$k(v(e^G) - v(e^B)) \geq u(w^G) - u(w^B) \geq v(e^G) - v(e^B).$$

Comme $k > 1$, cette condition ne peut être satisfaite que si $v(e^G) > v(e^B)$, i.e.

$$e^G \geq e^B$$

On en déduit que les bons agents choisissent toujours un niveau d’effort plus élevé.

Et donc que les salaires des bons agents sont toujours plus élevés:

$$w^G \geq w^B.$$

Voir feuille 2

Le niveau d’effort que je demande aux agents de type G doit être supérieur au niveau d’effort que je demande aux agents de type B.

Niveau d’effort et salaire plus élevé pour les G que pour les B

## Dans le contrat optimal, la contrainte d’incitation n’est pas saturée

**Raisonnement par l’absurde**

Supposons au contraire que IB soit saturée.

$$k[v(e^G) - v(e^B)] = u(w^G) - u(w^B).$$

Comme $k > 1$,

$$u(w^G) - u(w^B) > v(e^G) - v(e^B).$$

La contrainte IG n’est donc pas saturée.

Voir feuille 3

Si la contrainte IB est saturée, alors la contrainte IG elle ne peut pas être saturée, elle est vérifiée avec une inégalité.

Voir feuille 4

Voir slide

## Une relaxation du problème du principal

Comme les contraintes (PG) et (IB) ne sont pas saturées, on peut les ignorer.
On résoud donc le problème du principal:
Le principal maximise
$p(\Pi(e^G) - w^G) + (1-p)(\Pi(e^B) - w^B)$ sous les contraintes

- $u(w^B) - kv(e^B) \geq \underline{U}$ (PB)
- $u(w^G) - v(e^G) \geq u(w^B) - v(e^B)$ (IG)

On élimine deux contraintes parmi 4 puis on utilise les expressions pour réécrire tout en fonction d'une seule variable (ici en termes d'effort).

À l'optimum, les contraintes vont être satisfaites sous forme d'égalité sinon, on peut diminuer les salaires et continuer à respecter les contraintes.

## Contrat optimal

On calcule le Lagrangien

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= p(\Pi(e^G) - w^G) + (1-p)(\pi(e^B) - w^B) \\ &+ \lambda(u(w^B) - kv(e^B) - \underline{U}) \\ &+ \mu(u(w^G) - v(e^G) - u(w^B) + v(e^B)) \end{aligned}$$

## Conditions de premier ordre

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e^G} &= p\Pi'(e^G) - \mu v'(e^G) = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w^G} &= -p + \mu u'(w^G) = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e^B} &= (1-p)\Pi'(e^B) - k\lambda v'(e^B) + \mu v'(e^B) = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w^B} &= -(1-p) + \lambda u'(w^B) - \mu u'(w^B) = 0., \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= \overline{U} - u(w^B) + kv(e^B) = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} &= u(w^G) - v(e^G) - u(w^B) + v(e^B) = 0. \end{aligned}$$

## Contrat pour les types G

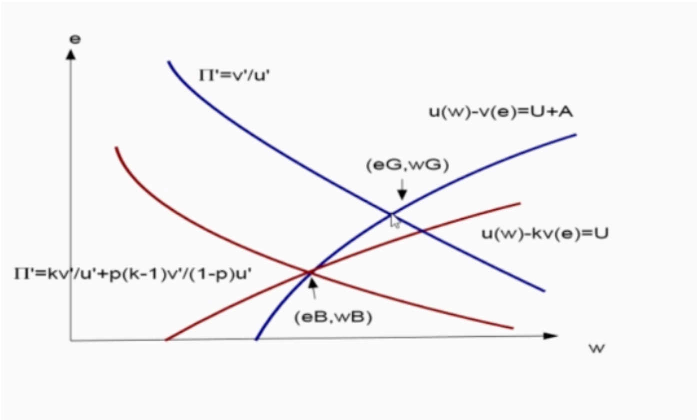
Le contrat pour les types $G$ satisfait

$$\begin{aligned} u(w^G) - v(e^G) &= \underline{U}, \\ \Pi'(e^G) &= \frac{v'(e^G)}{u'(w^G)} \end{aligned}$$

On distorde le contrat des agents de type B.

Ceux qui vont payer le coût sont les agents de types B.

## Contrat optimal




Les agents G ne vont pas être mis à leur utilité de réserve, ils sont sur une courbe d'indifférence plus élevée que celle d'auparavant.

## Interprétation du contrat optimal

Pour le type $G$, la condition:

$$\Pi'(e^G) = \frac{v'(e^G)}{u'(w^G)}$$

montre que le niveau d'effort $e^G$ est le même que dans le contrat avec information symétrique

Pour le type $B$, la condition:

$$\Pi'(e^B) = \frac{kv'(e^B)}{u'(w^B)} + \frac{p(k-1)v'(e^B)}{(1-p)u'(w^G)}$$

montre que, comme le profit $\Pi(e)$ est concave et le coût $v(e)$ est convexe, le niveau d'effort $e^B$ est inférieur au niveau d'effort du contrat symétrique.

Il n'y a pas de distortion du choix d'effort pour les agents de type $G$, mais il y a une distortion vers le bas du niveau d'effort pour le type $B$.

Par rapport au contrat en information symétrique, le niveau d'effort $eG$ reste égal, le niveau d'effort $eB$ a baissé, le salaire $wG$ a augmenté car les agents G obtiennent plus que leur utilité de réserve, leur salaire a augmenté. Pour les agents de type B, les salaires ont diminué, ils sont au même niveau qu'avant mais leur effort a baissé, leur utilité a augmenté, pour compenser, cela, il faut baisser le niveau de  salaire.

## Monopole et prix discriminatoires

On considère une seconde application:

- P est une entreprise en monopole qui choisit prix et quantités
- A est un consommateur qui peut avoir une demande faible ou une demande élev'ee