Cours 1 Variable aléatoire → description numérique du résultat d'une expérience.

= valeur numérique à chaque résultat possible d'une expérience
les résultats possibles sont les éléments de l'échantillonage.

Exemple : lancer d'une pièce de monnaie.

résultats {pile ; face}.

Une probabilité est une mesure numérique de la vraisemblance de l'occurence d'un évènement.

Variable discrète → peut prendre un nombre fini de valeurs ou un ensemble infini de valeurs dénombrables (peuvent être listées).

Exemple : contacter 5 clients ;

X désigne une variable aléatoire : le nombre de clients qui passent commande.

Soit X peut être : {0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5}.

Variable continue ⟶ peut prendre des valeurs numériques dans un intervalle ou une suite d'intervalle (poids ; distance ...).

Exemple : Remplir une canette de soda (max. 33 cL)

X le nombre de cL soit : $0 \leq X \leq 33$

Fonction de probabilité d'une VA discrète ⟶ (nommée x), $f(x)$ est la probabilité qu'une variable aléatoire discrète prenne une valeur spécifique.

Exemple : lancer un dé

X = nombre obtenu lors du lancer

$X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

soit $f(x) = \frac{1}{6}; \frac{1}{6}; \frac{1}{6}; \frac{1}{6}; \frac{1}{6}; \frac{1}{6}$.

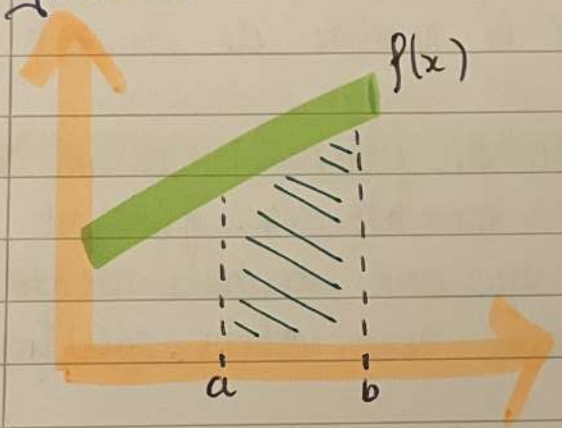
Cette distribution décrit toutes les probas selon les valeurs.

Conditions requises pour une fonction de probabilité discrète ⟶ $f(x) \geq 0 \; \forall x$;

$\sum f(x) = 1$.

Fonction de probabilité pour une variable aléatoire continue → fonction de densité. $f(x)$ est la probabilité qu'une variable aléatoire continue prenne une valeur x dans un intervalle particulier. C'est l'intégrale de la densité sur un intervalle correspondant

↳ surface sous la courbe de la fonction



soit $\int_a^b f(x)\,dx$

Calcul d'intégrale

Primitive = inverse d'une dérivé

soit F est la primitive de f

soit f est la dérivé de F.

$f = 0$; F est une constante

$f = 1$; $F = x$; $f = x^n$; $F = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$f = x$; $F = \frac{x^2}{2}$; $f = \frac{1}{x}$; $F = \ln(x)$

$f = x^2$; $F = \frac{x^3}{3}$; $f = \frac{1}{x^2}$; $F = -\frac{1}{x}$

$f = e^x$; $F = e^x$

Exemple : $\int_0^4 x \, dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 8 - 0 = 8$

$$\int_4^9 (3x^2 - 2x + 1)\, dx = \left[x^3 - x^2 + x\right]_4^9 = 605$$

$$\int_1^7 \frac{1}{x^4} \, dx = \left[\frac{1}{-3x^3}\right]_1^7 = \frac{114}{343}.$$

$$\int_0^4 e^x \, dx = \left[e^x\right]_0^4 = e^4 - e^0 = e^4 - 1$$

$$f = u' e^u \quad ; \quad F' = e^u$$

$$\int_0^4 e^{-x} \, dx = -\int_0^4 (-1) e^{-x} \, dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^4 -e^{-x} \, dx$$

$$= \left[e^{-x}\right]_0^4 = 1 - \frac{1}{e^4}.$$

$$\int_0^4 e^{2x} \, dx = \frac{1}{2} \times \int_0^4 2 e^{2x} \, dx = \frac{1}{2}\left[e^{2x}\right]_0^4$$

$$= \frac{e^8 - 1}{2}.$$

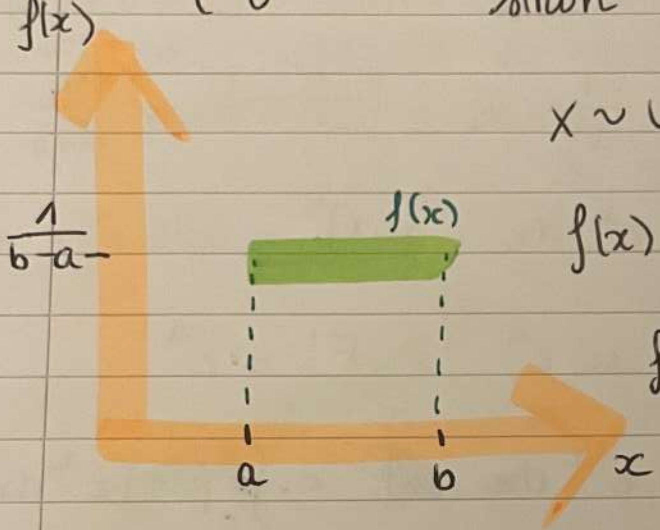
Conditions requises pour définir une fonction de probabilité - densité

↳ * f est une densité si et seulement si $f(x) \geq 0 \ \forall x$

* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx = 1.$

Exemple : Fonction de densité de probabilité uniforme avec une probabilité proportionnelle à la longueur de l'intervalle

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



$X \sim U(1, 6)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{si } 1 \leq x \leq 6 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

f non négative.
$\forall x,\ f(x) \geq 0$

$$P(X < b) = \int_{-\infty}^{b} f(t)\, dt$$

$$P(a < X) = \int_{a}^{+\infty} f(t)\, dt$$

$$P(a = X) = 0 = \int_{a}^{a} f(t)\, dt$$

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b).$$

D'après notre exemple précédent, $P(X < \frac{1}{2})$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \int_{0}^{1/2} 3t^2\, dt$$

$$= \left[x^3\right]_0^{1/2} = 1/8.$$

$$P\left(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{3}\right) = \int_{1/3}^{1/4} 3t^2\, dt \ \star =$$

$$[x^3]_{1/3}^{1/4} = \frac{13}{32}.$$

$$P(X > \frac{1}{3}) = \int_{1/3}^{+\infty} f(x)\,dx$$

$$\Leftrightarrow \int_{1/3}^{1} 3t^2\,dt + \int_{1}^{+\infty} 0\,dt$$

$$\Leftrightarrow [x^3]_{1/3}^{1} = \frac{26}{27}.$$

Fonction de répartition $\longrightarrow F(x) = P(X < x)$

$$= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

PROPRIÉTÉS : $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

F est croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$

(1) Variable aléatoire discrète $Y \sim U(1;6)$

$$P(Y \leq 3) = P(Y=1) + P(Y=2) + P(Y=3)$$

$$= \frac{1}{2}.$$

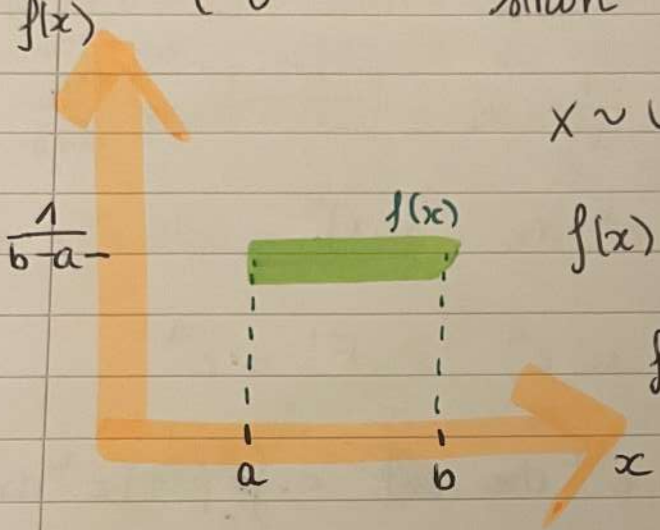
(2) Variable aléatoire continue $X \sim U(1;6)$

$$P(X \leq 3) = \int_{-\infty}^{3} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{1} 0\,dt + \int_{1}^{3} \frac{1}{5}\,dt$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{5}t\right]_1^3 = \frac{2}{5}.$$

proportionnelle à la longueur de l'intervalle

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



$X \sim U(1, 6)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{si } 1 \leq x \leq 6 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

f non négative.
$\forall x, f(x) \geq 0$

$$P(X < b) = \int_{-\infty}^{b} f(t)\, dt$$

$$P(a < X) = \int_{a}^{+\infty} f(t)\, dt$$

$$P(a = X) = 0 = \int_{a}^{a} f(t)\, dt$$

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b).$$

D'après notre exemple précédent, $P(X < \frac{1}{2})$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \int_{0}^{1/2} 3t^2\, dt$$

$$= [x^3]_0^{1/2} = 1/8.$$

$$P\left(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{3}\right) = \int_{1/3}^{1/4} 3t^2\, dt \; * =$$

$[x^3]_{1/3}^{1/4} = \frac{13}{32}$.

$P(X > \frac{1}{3}) = \int_{1/3}^{+\infty} f(x)\,dx$

$\Leftrightarrow \int_{1/3}^{1} 3t^2\,dt + \int_{1}^{+\infty} 0\,dt$

$\Leftrightarrow [x^3]_{1/3}^{1} = \frac{26}{27}$.

Fonction de répartition $\longrightarrow F(x) = P(X < x)$

$= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

PROPRIÉTÉS : $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$

F est croissante sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

(1) Variable aléatoire discrète $Y \sim U(1;6)$

$P(Y \leq 3) = P(Y=1) + P(Y=2) + P(Y=3)$

$= \frac{1}{2}$.

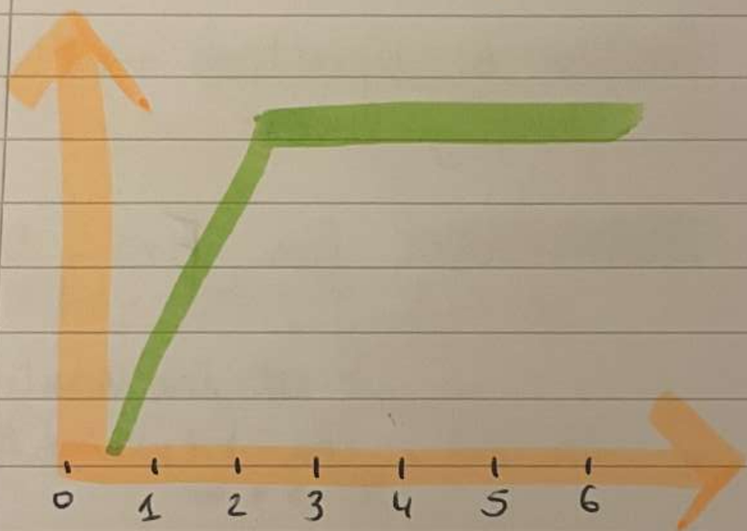
(2) Variable aléatoire continue $X \sim U(1;6)$

$P(X \leq 3) = \int_{-\infty}^{3} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{1} 0\,dt + \int_{1}^{3} \frac{1}{5}\,dt$

$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{5}t\right]_1^3 = \frac{2}{5}$.

(1)

(2)



Notation $\longrightarrow$ densité : $f(x)$

fonction de répartition : $F(x)$

Exemple : $1 < x < 6$: Loi $U(1;6)$

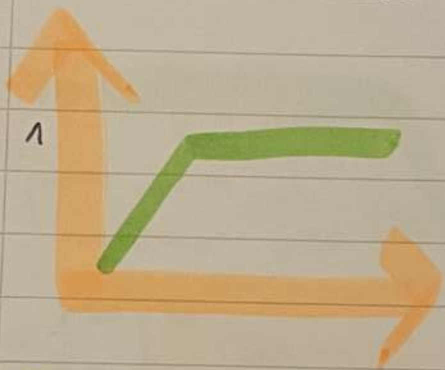
$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{1} 0\,dt + \int_{1}^{x} \frac{1}{5}\,dt$$

$$= \frac{1}{5}\left[t\right]_{1}^{x} = \frac{x-1}{5}$$

soit $\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} \frac{x-1}{5} & \text{si } 1 \leq x \leq 6 \\ 0 & \text{si } x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 6. \end{cases}$

$F(x) = \int_0^x 2t\,dt = [t^2]_0^x = x^2$

$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \\ 2 & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$



cours 2

Densité de x : $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Une fonction est une densité si et seulement si :

* f est non négative $\forall x\ f(x) \geq 0$
* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

Dans notre exemple, $\int_0^1 2x\,dx = [x^2]_0^1 = 1$
donc la fonction f est une fonction de densité

Fonction de répartition de X

$\longrightarrow F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

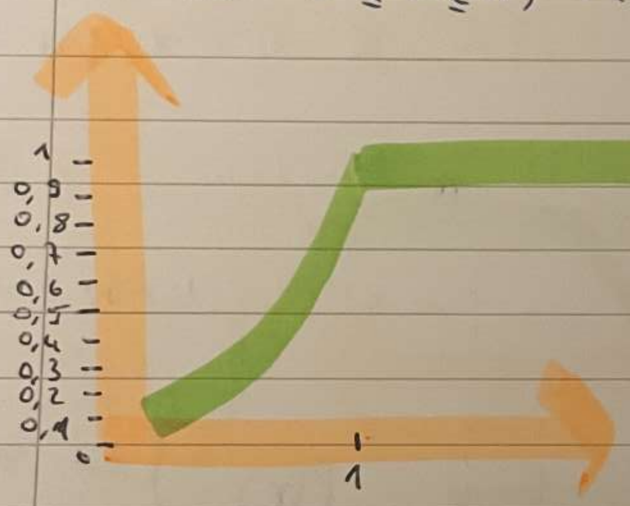
$x \in]0;1[$.

si la $x \leq 0$; $F(x) = 0$

si $x \geq 1$; $F(x) = 1$

$F(x) = \int_0^x 2t\,dt = [t^2]_0^x = x^2$

$\Rightarrow$ si $0 \leq x \leq 1$, $F(x) = x^2$.



Deux variables aléatoires $\longrightarrow f_{xy}(x;y)$.

$f_{xy}(x;y)$ est une densité jointe de x et y si et seulement si :

* $f_{xy}(x;y)$ non négative $\forall x, \forall y$,
  $f_{xy}(x;y) \geq 0$.

* $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{xy}(x;y) \quad dy = 1$

$P((a < x < b) \text{ et } (c < Y < d)) = \int_c^d \int_a^b f_{xy}(x;y)\,dx\,dy$

$\Rightarrow \int_a^b f_x(x)\,dx$ avec $f_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{xy}(x;y)\,dy$

Exemple : Notes d'un test de maths M
Notes d'un test de français F

Leur distribution dans la population des étudiants est donnée par la densité jointe : $f_{MF}(m, f) = \begin{cases} c(m+2f) & \text{si } 0 \leq m \leq 20 \text{ et } 0 \leq f \leq 20 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

$\forall m, \forall f, f_{MF}(m, f) \geq 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{MF}(m; f) \, dm \, df = 1$$

$$= \int_0^{20} \int_0^{20} (cm + 2cf) \, dm \, df \quad (1)$$

(1) $\int_0^{20} (cm + 2cf) \, dm = \left[\frac{cm^2}{2} + 2cfm\right]_0^{20}$

$\Rightarrow 200c + 40f$

puis, on intègre par rapport à f :

$$\int_0^{20} (200c + 40f) \, df = \left[200cf + 20f^2\right]_0^{20}$$

$\Rightarrow (200 \times c \times 20 + 20 \times c \times 20^2) - (200 \times c \times 0 + 20 \times c \times 0^2)$
$\Rightarrow 4000c + 8000c = 12\,000c$

$f_{MF}(m, f)$ est une densité jointe

Fonction de répartition de X

$\longrightarrow F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

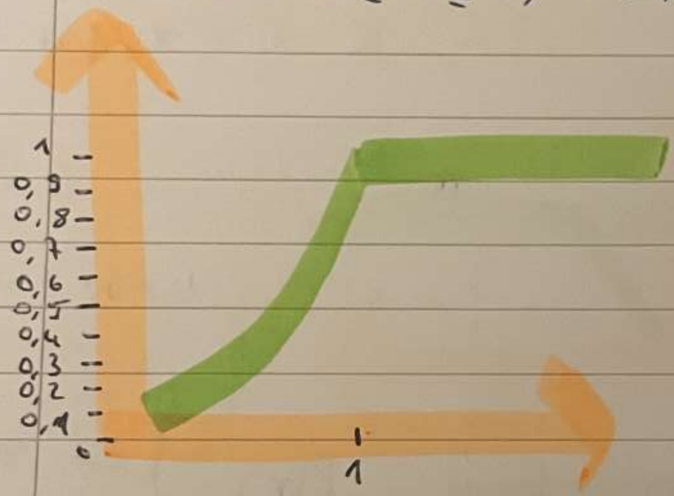
$x \in]0;1[$.

si la $x \leq 0$; $F(x) = 0$

si $x \geq 1$; $F(x) = 1$

$F(x) = \int_0^x 2t\,dt = [t^2]_0^x = x^2$

$\Rightarrow$ si $0 \leq x \leq 1$, $F(x) = x^2$.



Deux variables aléatoires $\longrightarrow f_{xy}(x;y)$.

$f_{xy}(x;y)$ est une densité jointe de x et y si et seulement si :

* $f_{xy}(x;y)$ non négative $\forall x, \forall y$,
  $f_{xy}(x;y) \geq 0$.

* $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{xy}(x;y)\; dy = 1$

$P((a < x < b) \text{ et } (c < Y < d)) = \int_c^d \int_a^b f_{xy}(x;y)\,dx\,dy$

$\Rightarrow \int_a^b f_x(x)\,dx$ avec $f_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{xy}(x;y)\,dy$

Exemple : Notes d'un test de maths M
Notes d'un test de français F

Leur distribution dans la population des étudiants est donnée par la densité jointe : $f_{MF}(m, f) = \begin{cases} c(m+2f) & \text{si } 0 \leq m \leq 20 \text{ et } 0 \leq f \leq 20 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

$\forall m, \forall f, f_{MF}(m, f) \geq 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{MF}(m; f) \, dm \, df = 1$$

$$= \int_0^{20} \int_0^{20} (cm + 2cf) \, dm \, df \quad (1)$$

(1) $\int_0^{20} (cm + 2cf) \, dm = \left[\frac{cm^2}{2} + 2cfm\right]_0^{20}$

$\Rightarrow 200c + 40f$

puis, on intègre par rapport à f :

$$\int_0^{20} (200c + 40f) \, df = \left[200cf + 20f^2\right]_0^{20}$$

$\Rightarrow (200 \times c \times 20 + 20 \times c \times 20^2) - (200 \times c \times 0 + 20 \times c \times 0^2)$
$\Rightarrow 4000c + 8000c = 12\,000c$

$f_{MF}(m, f)$ est une densité jointe

si $c = \frac{1}{12\,000}$.

Loi (densité) marginale de M $\longrightarrow f_M(m)$

$$f_M(m) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{MF}(m, f)\, df = \int_0^{20} (cm + 2cf)\, df$$

$$\Rightarrow \left[cmf + cf^2\right]_0^{20} = 20cm + 400c.$$

or, $c = \frac{1}{12000}$ donc, on a :

$$\frac{20m + 400}{12\,000} = \frac{m + 20}{60}$$

Loi (densité) marginale de F $\longrightarrow f_F(f)$

$$f_F(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{MF}(m, f)\, dm = \int_0^{20} (cm + 2cf)\, dm$$

$$\Rightarrow \left[\frac{cm^2}{2} + 2cfm\right]_0^{20} = 200c + 40cf$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{12000} \iff \frac{200 + 40f}{12\,000} = \frac{5 + f}{300}.$$

Soit x et y deux variables continues,

* f densité jointe
* f_1 et f_2 densités marginales

$f_X(x)$ $\quad\quad$ $f_Y(y)$.

Densité conditionnelle g_1 de x conditionnellement à $Y = y$

$$g_1(x / y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)}$$

$$g_x(X/Y=y) = \frac{f_{xy}(x;y)}{f_y(y)}$$

Densité jointe de x et de y :

$$g_{xy}(x,y) = \begin{cases} c + x - xy & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Densité jointe ?

$$* \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_{xy}(x,y)\,dx\,dy = 1$$

$$\int_0^1 \int_0^1 (c + x - xy)\,dx\,dy$$

$$\to \int_0^1 c + x - xy\,dx = \left[cx + \frac{x^2}{2} - \frac{yx^2}{2}\right]_0^1$$

$$= c + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}y$$

on intègre ensuite par rapport à y.

$$\int_0^1 c + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}y\,dy = \left[cy - \frac{y}{2} - \frac{y^2}{4}\right]_0^1$$

$$= c + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = c + \frac{1}{4}.$$

Soit $c = \frac{3}{4}$, unique c pour remplir la condition de densité jointe.

$\forall x\ \forall y,\ g_{xy}(x;y) \geq 0.$

Loi marginale de x $\longrightarrow \int_0^1 \left(\frac{3}{4} + x - xy\right) dy = \left[\frac{3}{4}y + xy - \frac{xy^2}{2}\right]_0^1$

$= \frac{3}{4} + x - \frac{x}{2} = \frac{3}{4} + \frac{x}{2}$.

Loi marginale de y $\longrightarrow \int_0^1 \left(\frac{3}{4} + x - xy\right) dx = \left[\frac{3}{4}x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^2 y}{2}\right]_0^1$

$= \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{y}{2} = \frac{5}{4} - \frac{1}{2}y$.

(pour calculer densité conditionnelle).

Densité conditionnelle de X sachant que $Y = y$ $\longrightarrow h_1(X/Y = y) = \frac{g(x,y)}{g_2(Y)}$

$= \frac{\text{densité jointe}}{\text{loi m}^{\text{le}} \text{ de } y}$.

soit densité jointe = fonction de densité à deux variables aléatoires

$h_1(X/Y = y) = \frac{g(x;y)}{g_2(y)} = \frac{3/4 + x - xy}{5/4 - y/2}$

$\boxed{g_2(y) = g_Y(y)}$

Densité conditionnelle de Y sachant que $X = x$ $\longrightarrow h_2(Y/X = x) = \frac{g(x,y)}{g_X(x,y)}$

$= \frac{3/4 + x - x/y}{3/4 + \frac{1}{2} \times x}$ sachant $g_X(x;y) = g_2(X)$.

Espérance mathématique d'une variable aléatoire discrète Y

$\hookrightarrow E(Y) = \mu = \sum y P(Y=y) = \sum y f(y)$
= moyenne pondérée.

Espérance mathématique d'une variable aléatoire continue

$\hookrightarrow E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx$.

Exemple : Variable aléatoire discrète $Y \sim U(1;6)$

$E(Y) = \sum_{1}^{6} y\, P(Y=y) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + \dots + 6 \times \frac{1}{6} = 3{,}5$

Variable aléatoire continue $X \sim U(\overset{a}{1};\overset{b}{6})$

$\int_1^6 t f(t)\, dt = \int_1^6 t \frac{1}{b-a}\, dt = \int_1^6 t \frac{1}{5}\, dt$

$= \frac{1}{5} \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^6 = \frac{36}{10} - \frac{1}{10} = \frac{7}{2}$.

$X \sim U(a;b)$; $E(X) = \frac{a+b}{2}$.

Exemple : $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx = \int_0^1 x\, 3x^2\, dx$

$= \int_0^1 3x^3\, dx = \frac{3}{4} [x^4]_0^1 = \frac{3}{4}$.

Exemple : Densité jointe m et f

$$f_{MF}(m,f) = \begin{cases} c\,(m+2f) & \text{si } 0<m<20 \text{ et } 0<f<20 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Sachant $f_m(M) = \frac{m+20}{600}$

$$E(M) = \int_0^{20} m\, f_M(m)\, dm = \int_0^{20} m \frac{m+20}{600}\, dm$$

$$= \int_0^{20} \frac{m^2+20m}{600}\, dm = \frac{1}{600} \cdot \left[\frac{m^3}{3} + 10\, m^2\right]_0^{20}$$

$$= \frac{1}{600}\left(\frac{8000}{3} + 4000\right) = \frac{20000}{1800} = \frac{100}{9}.$$

Densité marginale de F $\longrightarrow E(F) = \int_0^{20} f\, \underbrace{f_F(f)}_{=\frac{5+f}{300}}\, df$

$$E(F) = \int_0^{20} f\, \frac{5+f}{300}\, df = \int_0^{20} \frac{f^2+5f}{300}\, df$$

$$= \frac{1}{300} \times \left[\frac{f^3}{3} + \frac{5}{2} f^2\right]_0^{20} = \frac{1}{300}\left(\frac{8000}{3} + 1000\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{110}{9}$$

Densité jointe de x et y

$$\hookrightarrow f(x;y) = \begin{cases} 3/4 + x - xy & 0<x<1 \text{ et } 0<y<1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Densité marginale de x

$$\hookrightarrow f_x(x) = \begin{cases} 3/4 + 1/2\,x & 0<x<1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Fonction de répartition de X

$\longrightarrow F(x) = P(X \; x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt \text{ si } 0 < x < 1 \\ 1 \text{ si } x \geq 1. \end{cases}$

$$\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_0^x \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}t\right)dt$$

$$= \left[\frac{3}{4}t + \frac{1}{2}\frac{t^2}{2}\right]_0^x = \frac{1}{4}(3x + x^2)$$

Espérance conditionnelle de X sachant $Y = \frac{1}{2}$

$$E(X/Y = \tfrac{1}{2}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x g(x)(X/Y = \tfrac{1}{2}).$$

$$g_X(X|Y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{3/4 + x - yx}{3/4 - 1/2\,y} & \text{si } 0 < x < 1 \text{ et } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $Y = \frac{1}{2}$: $E(X/Y = \frac{1}{2}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x g_X$

$(X/Y = 1/2)\,dx = \int_0^1 \left(\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}x^2\right)dx$

$$= \left[\frac{3}{4}\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{13}{24}.$$

Cours 3 $f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{5}(2x+3y) & \text{si } 0<X<1,\ 0<Y<1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$P(X>0,8) = \int_{0,8}^{+\infty} f_X(x)\, dx$

↳ densité marginale de x.

$f_X(x)\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x;y)\, dy$ soit densité marginale de x.

$\Longleftrightarrow \int_0^1 \frac{2}{5}(2x+3y)\, dy$

$\Longleftrightarrow \frac{2}{5} \times \left[2xy + \frac{3y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{2}{5} \times \left(2x + \frac{3}{2}\right)$

si $x \in [0;1]$

$P(X>0,8) = \int_{0,8}^{1} \frac{2}{5}\left(2x + \frac{3}{2}\right) dx$

$\Rightarrow \frac{2}{5} \times \left[x^2 + \frac{3x}{2}\right]_{0,8}^{1} = \frac{2}{5} \times 0,66 = 0,264.$

$P(X>0,8 / Y=0,3) = \int_{0,8}^{+\infty} g_X(x / Y=0,3)$

↳ densité conditionnelle $g_X(X/Y)$ de x sachant y.

Densité conditionnelle de $g_X(X/Y)$

$\hookrightarrow g_X(X/Y) = \frac{f_{XY}(x;y)}{f_Y(y)}$ → densité jointe / densité marginale de y.

Densité marginale de Y :

$$f_Y(y) : \int_{-\infty}^{+\infty} f_{YX}(x;y)\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{2}{5}(2x+3y)\,dx = \frac{2}{5}\left[x^2 + \frac{3xy}{2}\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{3y}{5} = \frac{2+3y}{5} \text{ si } y \in [0;1].$$

Soit $g_X(x/Y) = \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \dfrac{2/5\,(2x+3y)}{2/5\,(1+3y)}$

$= \dfrac{2x+3y}{1+3y}$. avec $x \in]0;1[$ et $y \in]0;1[$.

$$g_X(x/Y=0,3) = \frac{2x+0,9}{1,09}$$

$$P(X>0,8\,/Y=0,3) = \int_{0,8}^{+\infty} g_X(x/Y=0,3)\,dx$$

$$= \int_{0,8}^{1} \frac{2x+0,9}{1,09}\,dx$$

$$= \frac{1}{1,09}\left[x^2+0,9x\right]_{0,8}^{1} = 0,284.$$

$$P(Y>0,8\,/X=0,3) = \int_{0,8}^{+\infty} g_Y(Y/X=0,3)\,dy$$

Densité conditionnelle de Y sachant X = 0,3

$\longrightarrow g_Y(Y/X) = \dfrac{f(x;y)}{f_X(x)}$.

Densité jointe

$\hookrightarrow f_{XY}(x;y) = \begin{cases} 2/5\,(2x+3y) & \text{si } 0<x<1 \text{ et } 0<y<1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

$P(Y>0,8\,/\,X=0,3) = \int_{0,8}^{+\infty} g_Y(Y/X=0,3)\,dy.$

$g_Y(Y/X) = \dfrac{f(x;y)}{f_X(x)} = \dfrac{2/5\,(2x+3y)}{2/5\,(2x+\frac{3}{2})}$

$= \dfrac{2x+3y}{2x+\frac{3}{2}} = \dfrac{2\times 0,3+3Y}{2\times 0,3+\frac{3}{2}} = \dfrac{3Y+0,6}{2,1}.$

$P(Y>0,8\,/\,X=0,3) = \int_{0,8}^{1} \dfrac{3Y+0,6}{2,1}\,dy$

$= \dfrac{1}{2,1}\left[\dfrac{3y^2}{2}+0,6y\right]_{0,8}^{1}$

$= \dfrac{1}{2,1}\left(\dfrac{3}{2}+0,6-\dfrac{3}{2}\times 0,8^2-0,6\times 0,8\right)$

$= 0,314.$

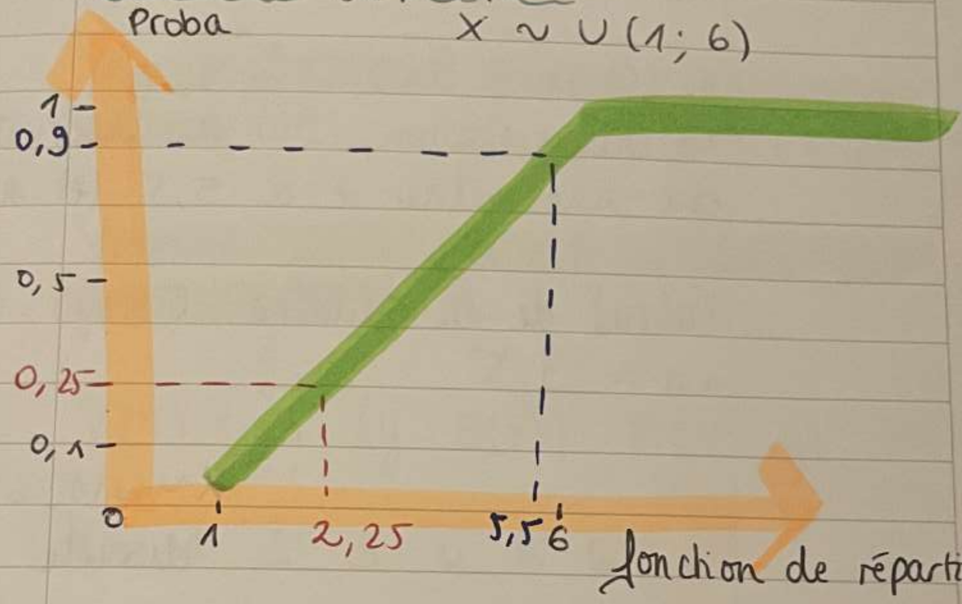
Fonction quantile $\longrightarrow$ Soit une probabilité c, le quantile x_c est tel que :

$P(X<x_c) = c$

Médiane $\longrightarrow$ C'est l'observation telle que la moitié des observations ont une valeur inférieure/supérieure.

$P(X<\text{médiane}) = \dfrac{1}{2}.$

Solution graphique



$\boxed{Q_{25}(X)}$ -> quantile 25% $= 2,25$

$\boxed{Q_{90}(X)}$ -> quantile 90% $= 5,5$

$X \sim U(1;6)$

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 1 \\ \frac{x-1}{5} \text{ si } 1 \leq x \leq 6 \\ 0 \text{ si } x \geq 6 \end{cases}$$

$$F(x_p) = \frac{x_p - 1}{5}$$

$\Rightarrow \boxed{x_p = 5p + 1} \leftarrow$ fonction quantile

$Q = (0,25)$ quantile 25%

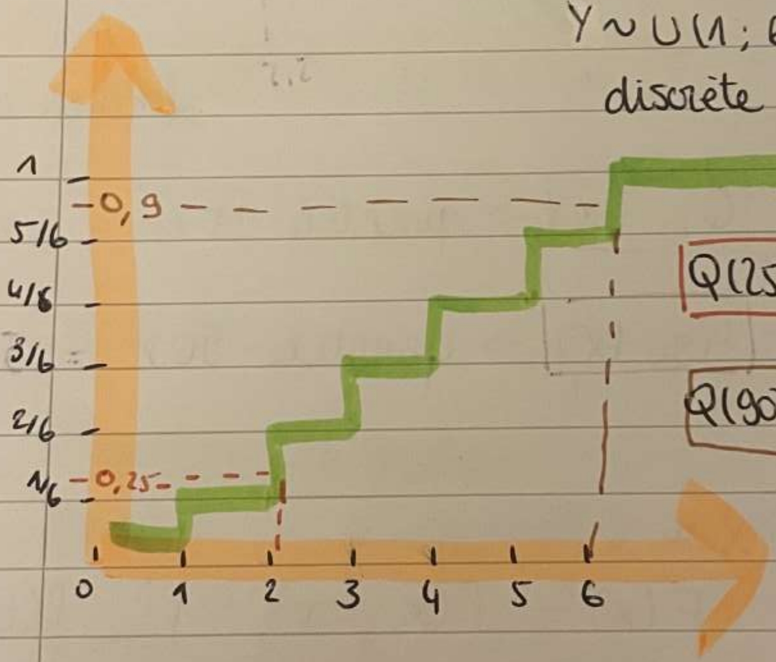
$Q(0,25) = 5 \times 0,25 + 1 = 2,25$

$Q(0,9) = 9 \times 0,25 \overset{+1}{=} 5,5$

↳ interprétation : 90% des observations ont une valeur < à 5,5 (et 10% >).

Calcul de la médiane : $Q(0,5) = 0,5 \times 0,25 + 1 = 3,5$

$Y \sim U(1;6)$, VAR discrète



$\boxed{Q(25)(Y)} = 2$

$\boxed{Q(90)(Y)} = 6$

Variance d'une variable aléatoire discrète ⟶ $V(Y) = \sum_{y} (y - E(Y))^2 \, P(Y=y)$

↳

C'est la somme pondérée (aux probabilités) des écarts au carré d'une variable aléatoire par rapport à sa moyenne.

Variance d'une variable aléatoire continue $\longrightarrow V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

Variance d'une variable aléatoire uniforme discrète $\longrightarrow U(1;6)$

$$V(Y) = \sum_{Y=1}^{6} (y - E(Y))^2 \, P(Y=y)$$

$Y = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$

$$P(Y=y) = \frac{1}{6}$$

$$E(Y) = \sum_{Y=1}^{6} y\, P(Y=y) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6}$$

$$+ \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6} = \frac{1}{6} \times 21 = 3,5$$

$$V(Y) = (1-3,5)^2 \times \frac{1}{6} + (2-3,5)^2 \times \frac{1}{6} + (3-3,5)^2 \times \frac{1}{6} + \dots + (6-3,5)^2 \times \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow V(Y) = \frac{35}{12}$$

Variance d'une variable aléatoiRe continue $\longrightarrow U(1,6)$

$$VAR(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$\Rightarrow \int_1^6 x^2 \frac{1}{5} dx - \left(\int_1^6 \frac{1}{5} x \, dx\right)^2$$

$$= \left[\frac{1}{5} \times \frac{x^3}{3}\right]_1^6 - \left(\left[\frac{1}{5} \times \frac{x^2}{2}\right]_1^6\right)^2$$

$$= \left(\frac{216}{15} - \frac{1}{15}\right) - \left(\frac{36}{10} - \frac{1}{10}\right)^2 = \frac{25}{12}.$$

Densité d'une variable continue X

$$\hookrightarrow f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$\Rightarrow V(X) = \underbrace{\int_0^1 x^2 \, 3x^2 \, dx}_{E(X^2)} - \underbrace{\left(\int_0^1 x \, 3x^2 \, dx\right)^2}_{E(X)^2}$$

$$= \int_0^1 3x^4 \, dx - \left(\int_0^1 3x^3 \, dx\right)^2$$

$$= \left[3 \times \frac{x^5}{5}\right]_0^1 - \left(\left[3 \times \frac{x^4}{4}\right]_0^1\right)^2.$$

$$= \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{80} = V(X).$$

Quelques identités

$$\hookrightarrow V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$V(aX) = a^2 * V(X)$$

$$V(X+a) = V(X)$$

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$$

La covariance va permettre de calculer la variation simultanée de deux variables par rapport à leur moyenne respective.

$$Cov(XY) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

$$\Leftrightarrow Cov(XY) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Si X et Y indépendants, alors :
$E(XY) = E(X)E(Y)$
et $Cov(XY) = 0$.

$$Cov(XY) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j P(X = x_i \text{ et } Y = y_j) - E(X)E(Y).$$

Densité jointe : $c = \frac{1}{12\,000}$

$$f_{MF}(m,f) = \begin{cases} c(m+2f) & \text{si } 0 \leq m \leq 20 \text{ et } 0 \leq f \leq 20 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$Cov(MF) = E(MF) - E(M)E(F).$$

$$E(MF) = \int_0^{20}\int_0^{20} mf\, f_{MF}(m,f)\, dm\, df.$$

$$E(MF) = \int_0^{20}\int_0^{20} mfc(m+2f)\, dm\, df$$

$$\Rightarrow \int_0^{20}\underbrace{\int_0^{20} (m^2fc + 2f^2m)\, dm}_{=\left[\frac{m^3}{3}fc + m^2 cf^2\right]_0^{20}} df$$

$$\Rightarrow \int_0^{20} \left(\frac{8000}{3}fc + 400f^2\right) df$$

$$\Rightarrow \left[\frac{4000}{3} f^2c + 400c\frac{f^3}{3}\right]_0^{20}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{4000}{3}400c + 400c\frac{8000}{3}\right)$$

$$= 1\ 600\ 000\ c$$

avec $c = \frac{1}{12000}$, $E(MF) = \frac{400}{3}$.

$E(M) = \frac{100}{9}$ et $E(F) = \frac{110}{9}$

$$Cov(M,F) = E(MF) - E(M) \times E(F)$$

$$Cov(M,F) = \frac{400}{3} - \frac{110}{9} \times \frac{100}{9}$$

$$Cov(M,F) = -\frac{200}{81} < 0.$$

Nouvelle densité jointe

$$f_{MF}(m,f) = \begin{cases} c(3m+2f) & \text{si } 0 \leq m \leq 20 \text{ et } 0 \leq f \leq 20 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$