Pour dét : si on intervertit 2 colonnes → change de signe

chap 4

Formes quadratiques

p51 **ex 1** $W\left[a\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}x_1'\\y_1'\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right]$

$$= W\left[\begin{pmatrix}ax_1+bx_1'\\ay_1+by_1'\end{pmatrix};\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right]$$

$$= (ax_1+bx_1')x_2 - (ay_1+by_1')y_2$$

$$= a(x_1x_2-y_1y_2)-b(x_1'x_2-y_1'y_2)$$

$$= aW\left[\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right]+bW\left[\begin{pmatrix}x_1'\\y_1'\end{pmatrix};\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right] \rightarrow W \text{ est bilinéaire}$$

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} x_1 & y_1 \end{array} \\ & \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix} \begin{array}{c} x_2 \\ y_2\end{array}\end{array}$$

ex 2 : $W\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\y_1 & y_2\end{pmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & y_1 \end{array} \ {}^tX \\ \begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix} \begin{array}{c} x_2 \\ y_2\end{array} \ Y\end{array}$$

P52 **ex1** $Q(x,y,z) = 3x^2+2xy-2y^2+3z^2$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\1 & -2 & 0\\0 & 0 & 3\end{bmatrix} \begin{array}{c} x \\ y \\ z\end{array}\end{array} \quad \text{symétrique}$$

$$\boxed{Q(x,y,z) = {}^tXAX =}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = {}^tX$$

$$A = \begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\1 & -2 & 0\\0 & 0 & 3\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}3x+y\\x-2y\\3z\end{pmatrix}$$

$$\overset{X}{(x,y,z)} \quad (3x^2+xy+xy-2y^2+3z^2$$

$= x(3x+y) + y(x-2y) + z \times 3z$
$= 3x^2 + 2xy - 2y^2 + 3z^2$

ex 2 : $ax_1^2 + b\,x_1 x_2 + c x_2^2$

$Q(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1 x_2 + cx_2^2$

$$A = \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ \left[\begin{array}{cc} a & b/2 \\ b/2 & c \end{array}\right] & \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \end{array}$$

commencer par la diagonale

ex : $Q(x,y) = x(y+2x) - y(3x-y)$
$= 2x^2 - 2xy + y^2 = x^2 + (x-y)^2$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$Q(x,y) = x^2 + 2y^2$

Matrice orthogonale :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

M. normée :

$$\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

$$\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$$

$$\left\|\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ +\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$$

Matrice orthonormale :

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

PS3

Preuve de Prop 1

Soit $P = (v_1 \; v_n)$ orthonormée.

$$^tP = \begin{pmatrix} ^tv_1 \\ \vdots \\ ^tv_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & (v_1 \dots v_j \dots v_n) \\ ^tPP = \begin{pmatrix} ^tv_1 \\ ^tv_i \\ ^tv_n \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

transposée de $P \times P$

Par définition, $c_{ij} = V_i \cdot V_j$ ← produit scalaire.

Comme P orthogonale $i \neq j \Rightarrow V_i \cdot V_j = 0 = c_{ij}$

P normé : $i = j \Rightarrow c_{ii} = V_i V_i = \|V_i\|^2 = 1$.

$$^tPP = I$$

$c_{ij} = 0$

$c_{ii} = 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Conclusion : $P^{-1} = {}^tP$.

$Q(X) = {}^tX A X$ or $A = PDP^{-1}$
$= PD\,{}^tP$ si P orthonormale

$Q(X) = {}^tX \overbrace{P \cdot D \cdot {}^tP}^{A} X$

Soit $Y = {}^tPX \Rightarrow {}^tY = {}^tXP$

$\Rightarrow Q(X) = {}^tY D Y$

$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, (y_i)^2$

P53 Exemple :

$Q(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy$.

$$A = \begin{array}{cc} x & y \end{array}$$
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{array}{c} x \\ y \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = -\lambda(2-\lambda)$$

$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 2$ Trace $= 1+1 = \Sigma \lambda_i$ ok

Det $= 0 = 0 \times 2 = \Pi \lambda_i$ ok

$E_{\lambda_1} = 0$ $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x-y \\ -x+y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow y = x \quad V_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow W_1 \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ $\|V_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$E_{\lambda_2 = 2}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} -x-y \\ -x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow y = -x \quad V_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\|V_2\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow W_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$

$A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

× Pk pas ?

$({}^tX \times P) \times D \times {}^tP \times X$

? $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

p 53

$P = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$ $P^{-1} = {}^tP = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$

Posons $Y = {}^tP \times \cancel{X} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2\,(x+y) \\ \sqrt{2}/2\,(x-y) \end{pmatrix}$

$D \times {}^tP \times X$ $Q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)\right]^2 + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y)\right]^2 = (x-y)^2$

Q = dans la nouvelle base orthonormée

p55 ex : $Q(x,y,z) = x^2 + y^2 + x^2 + 2xy + 2yz + 2xz$

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ & \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \end{array}$$

Pk ?

$\det = \Pi \lambda_i$ Valeur propre évidente $\lambda = 0$

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{C_1+C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 3-\lambda & 1-\lambda & 1 \\ 3-\lambda & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2-L_1 \\ L_3-L_1}}{=} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(3-\lambda)$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \quad \lambda_3 = 3$.

Vérif Trace $= 3 = \Sigma\lambda_i$ ok

Det $= 0 = \Pi\lambda_i$ ok.

$E_{\lambda_1=\lambda_2=0}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = 0 \\ y = y \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y-z \\ y = y \\ z = z \end{cases}$$

$$E_{\lambda_1=\lambda_2=0} = \left\{ \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} / (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

$$= y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad V_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$V_2 =$

* difficile à trouver donc donné par le prof

On peut aussi choisir $\underbrace{V_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad V_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{leur produit scalaire est nul dc } V_1 \perp V_2}$

qui forment une base orthogonale de $E_{\lambda_1=\lambda_2=0}$

* $V_1 \times (aV_1 + bV_2) = (\vec{0})$

$\Leftrightarrow 2a + +b = 0$ par ex $a = 1$

$\Leftrightarrow b = -2a$ donc $b = -2$

$\|V_1\| = \sqrt{1^2+1^2+(-2)^2} = \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{6}}{6} = 1$

$U_1 \begin{pmatrix} \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{6}/6 \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$ $\quad \begin{matrix} 1 \times \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 1 \times \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -2 \times \frac{\sqrt{6}}{6} \end{matrix}$

$\|V_2\| = \sqrt{2}$ $\quad U_2 \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}$

$\underline{E_{\lambda 3 = 3}}$ $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -2x+y+z \\ x-2y+z \\ x+y-2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = \frac{y+z}{2} \\ y = \frac{x+z}{2} \\ z = \frac{x+y}{2} \end{cases}}$

$\Leftrightarrow \boxed{x = y = z}$ $\quad V_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\|V_3\| = \sqrt{3}$ $\quad U_3 \begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 \end{pmatrix}$

$A = PD\,{}^tP$

$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad P = \begin{bmatrix} \sqrt{6}/6 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{6}/6 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{3}/3 \\ -\sqrt{6}/3 & 0 & \sqrt{3}/3 \end{bmatrix}$

$Y = {}^tPX$

$\begin{bmatrix} \sqrt{6}/6 & \sqrt{6}/6 & \sqrt{6}/3 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{6}/6\,(x+y-2z) \\ \sqrt{2}/2\,(y-x) \\ \sqrt{3}/3\,(x+y+z) \end{pmatrix}$

$D_X\,{}^tP_X X$

$= Q(X) = 0\left[\frac{\sqrt{6}}{6}(x+y-2z)\right]^2$

$+ 0\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(y-x)\right]^2$

$+ 3\left[\frac{\sqrt{3}}{3}(x+y+z)\right]^2$ ← car ${}^tXP$

$$\boxed{Q(X) = (X+Y+Z)^2}$$

$Q(x,y,z) = x^2 + x\left(y - z/2\right) + \dots$ termes en y e z seulement

$= \left(x + \frac{1}{2}\left(y - z/2\right)\right)^2 - \left[\frac{1}{2}\left(y - z/2\right)\right]^2 +$ reste

trop compliqué donc on s'est arrêtés là

p55 **Exemple de la méthode de Gauss**

$Q(x,y,z) = x^2 + xy + y^2 - 2yz - z^2$

$Q = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 - \frac{y^2}{4} + y^2 - 2yz - z^2$

$= \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(y^2 - \frac{8}{3}yz\right) - z^2$

$= \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left[\left(y - \frac{4}{3}z\right)^2 - \frac{16}{9}z^2\right] - z^2$

$= \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(y - \frac{4}{3}z\right)^2 - \frac{4}{3}z^2 - z^2$

$= \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(y - \frac{4}{3}z\right)^2 - \frac{7}{3}(z)^2$

$0 \times x$ $1 \times y$ $1 \times z$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -4/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

forme linéaire indépendante

donc c'est une décomposition canonique

et pas $-7/3$

Signature $(n_+ = 2 \quad n_- = 1)$

⇒ Dét < 0 car deux valeurs propres ⊕ et une négative

$Q(X) = \alpha(x+y+z)^2 + \beta(y+z)^2 + \gamma z^2$

* Si α, β, et γ sont $\geqslant 0$

→ forme semi définie positive

Si $\gamma = -2$ sur $\begin{cases} x+y+z=0 \\ y+z=0 \end{cases}$ la forme est < 0

forme particulière :

définie positive

Si α, β et $\gamma > 0$ $\begin{cases} x+y+z=0 \\ y+z=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow x=y=z=0$

$Q(x,y) = 2(x+y)^2$ $\quad n_+ = 1$

$n_- = 0$: défini positive

$Q(x,y) = \alpha(x+y)^2 + \beta y^2$

avec $\alpha > 0$ et $\beta < 0$

Sur $|\, x+y=0$ et $y \neq 0$ $\quad Q < 0$ → défini ⊖

sur $|\, y=0$ et $x \neq 0$ $\quad Q > 0$ défini ⊕

P56 exemple : $Q(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + \frac{1}{2}yz$

$$A = \begin{array}{cccc} x & y & z & \\ \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix}\right. & & & \left.\right] \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \end{array}$$

Mineur diagonaux principaux :

Mineur 1 = ⌟ $\quad$ il y a n mineurs.

2 ⌟ $\quad$ Les mineurs servent à connaître

3 ⌟ $\quad$ signe des λ_i

$M_1 = 1 \quad M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \qquad M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$

Q est définie positive

p57

Ex :

$Q_1(x,y) = x^2 + 2y^2 + 2xy$

$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ dét 1 > 0 donc soit les λ_i sont ttes les 2 $\oplus$ ou $\ominus$

trace $= 3 > 0$ donc λ_i snt > 0

donc Q_1 est définie positive

autre méthode :

$M_1 = 1$

$M_2 = 1$ ts les mineurs diagonaux principaux positifs (strictement)

$Q_1 = x^2 + 2xy + 2y^2 = (x+y)^2 + y^2 \qquad n_+ = 2$

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$

* $Q_2 = xy$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$ $\det = -1/4 < 0$

1 vp > 0 1 vp < 0

Q_2 est non définie

$M_2 = -1/4$ ni la première proposition ni la seconde ne s'appliquent pour $M_2 < 0$

$\Rightarrow Q_2$ est non définie

$Q_2 = \frac{1}{4}(x+y)^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2 \qquad n^+ = 1, \quad n_- = 1$

$Q_3 = 2x^2 + 8y^2 + 8xy$

$A = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$ dét $= 0$ on a 0 comme vp.

on sait que A est semi-définie

$\lambda_1 = 0$
et comme
Σ diago $= \Sigma\lambda_i$
$0 + \ldots = 8 + 2$
$0 + \ldots = 10$
$\lambda_2 = 10$

$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 10 \end{cases}$ Q_3 est semi déf positive

$Q_3 = 2(x^2 + 4xy) + 8y^2$

$= 2((x+2y)^2 - 4y^2) + 8y^2$

$= \underbrace{2(x+2y)^2}_{1} \underbrace{+ 0 \times }_{2}$ $\quad n_+ = 1$

$n_- = 0$

2 termes car dim 2

$Q_4 = x^2 - 2xy + y^2$

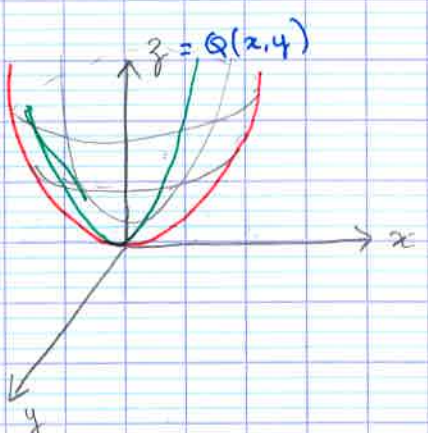
$= (x-y)^2$ semi def positive

$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ det $= 0$ $\quad \lambda_1 = 0$

Trace $= 2$ $\quad \lambda_2 = 2$

$Q(x,y) = x^2 + y^2$

définie positive



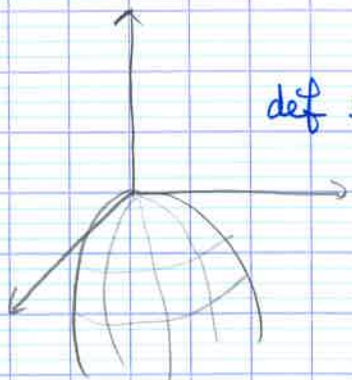
ballon de rugby qui part vers l'infini

on admet un min global de 0 atteint uniquement à l'origine.

$Q(x,y) = -(x^2+y^2)$ Max global atteint en 0

atteint uniquement à l'origine

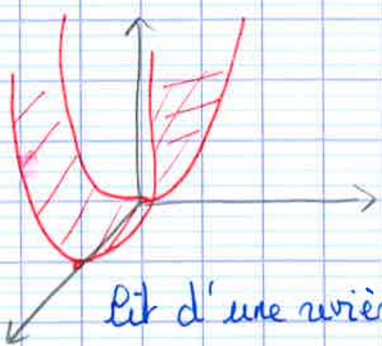
déf négative



$Q(x,y) = x^2$

est semi-déf positive.

pour y $= 2$ $\quad Q = x^2$

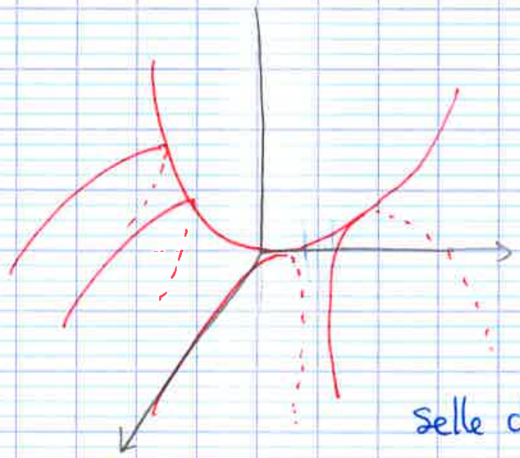


lit d'une rivière

admet un min global qui vaut 0 atteint par une infinité de pts (sur tout l'espace propre de Ker A] matrice associée.

$Q = x^2 - y^2$

non définie



Selle de cheval

elle n'a ni max ni min.

mais l'origine est un pt particulier

$\frac{dQ}{dx} = 0 \quad \frac{dQ}{dy} = 0$ donc plan tangent est horizontal

$(0,0)$ est un point selle : (ni max ni min)

Ex P58 $\ast\ Q(X,Y) = X^2 + Y^2 - XY$

$= \left(X - \frac{Y}{2}\right)^2 - \frac{Y^2}{4} + Y^2$

$= \left(X - \frac{Y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} Y^2$ définie ⊕

admet un min global de 0 en $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$X^2 - 2(2X)^2 + 2X \times 2 \times X$

$= X^2 - 8X^2 + 4X^2$

$= -3X^2$

$\ast\ Q(X,Y) = X^2 - 2Y^2 + 2XY$

$= (X+Y)^2 - 3Y^2$ non définie

- Sur $(X+Y) = 0 \to Y = -X$

  $Q(X,-X) = -3X^2$ définie négatif → sur ce ss-espace max global

- Sur $Y = 0$

  $Q(X,0) = X^2$ → définie positif → sur ce ss esp : min global

$Y = 2X$

$Q(X,2X) = (3X)^2 - 3(2X)^2 = -3X^2$

0 Max global de ce sous espace $Y = 2X$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Rang = 3 forme linéaire indépendante $\Rightarrow$ décomposit° unique

$Q(X) = {}^tXAX$

$x^2 + 2y^2 - z^2 + 2xy + 6yz$
$= (x+y)^2 + (y+3z)^2 - 10z^2$

sur $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 3y - z = 0 \end{cases}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} 0 & B \\ {}^tB & A \end{bmatrix}$$

$n = 3$ variables
$p = 2$ contraintes il faut calculer le dernier mineur diago principal. $\Rightarrow$ det H.

* Si forme quadratique déjà diagonale

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Mémotechniquement :

p59 ex : $Q(X, Y) = X^2 - 2XY - Y^2 = (X-Y)^2 - 2Y^2$

sur $X + Y = 0$

matrice des contraintes
on peut la voir cô la jacobienne des contraintes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1X et 1Y

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

B, ${}^tB$, A

nb de variables : 2 car y et x

1 contrainte

$n = 2$
$p = 1$

$n - p = 2 - 1 = 1$

$$\text{Dét } H = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

C'est du signe de $(-1)^p$ donc Q est définie positive sur les contraintes et admet un minimum global de 0 en $(0,0)$ sous les contraintes.

- ~~signe de~~ Dét $H \Rightarrow \ominus$
  Signe de $(-1)^n = (-1)^2 \Rightarrow \oplus$] $\neq$ pas déf négative

- Dét $H \Rightarrow \ominus$ (1)
$(n-p) = 1$: le mineur principal -1 est $\Rightarrow \ominus$ (2)
  signe de $(-1)^p = (-1)^1 \Longrightarrow \ominus$ (3)
  $\Rightarrow$ déf $\oplus$