Microéconomie : Incertain et information

Partie 4 : Assurance

INTRODUCTION

Cours du 24.10

Assurance

Les premiers contrats d'assurance analysés sont des contrats venant des républiques italiennes vers la fin du Moyen-Âge. La première application de l'assurance a été pour les **bâteaux**.

Un bâteau qui partait de Gènes à destination de l'Asie avait ⅓ de chance de ne pas revenir, le métier de capitaine était assez risqué.

Les ⅔ des bâteaux qui revenaient étaient remplis d'épices, on avait beaucoup de profit.

Assez vite, il y avait peut-être une façon de convaincre les amateurs de construire des bateaux en les assurant sur les pertes de bâteaux.

C'était des contrats qui avaient la forme suivante : ils payaient une prime et si le bateau revenait, la prime restait dans la proche de l'assureur mais sinon, l'assureur payait une partie de la prime au marin. C'étaient des contrats plutôt maritimes.

Petit à petit, le secteur de l'assurance a grossi et s'est intéressé à plus de risques. On vit maintenant dans un monde où on a la possibilité de s'assurer contre un nombre de risques gigantesque.

L'assurance (*de voiture, d'assurance maladie..*) ne rembourse pas les sinistres de petite taille (*exemple : en dessous de 200 euros*). Une assurance est dite complète lorsqu'elle rembourse intégralement la valeur du sinistre.

L'assurance est un autre moyen (*que la diversification du portefeuille*) pour **diminuer les risques.**

L'idée est de **partager** les risques entre agents économiques, quand les risques sont indépendants, lorsque les risques n'ont pas tous lieu en même temps.

Si les risques entre agents sont corrélés (*par exemple une guerre nucléaire*), il est impossible de partager les risques et de s'assurer. Les destructions vont toucher tout le monde au même moment, elle va devoir rembourser tout le monde, cela va être une perte gigantesque pour l'assureur, il va donc refuser de le faire.

Il y a toujours des clauses qui nous disent que si on a des événements climatiques ou inattendus (tremblement de terre), l'assurance ne nous assure pas car elle ne peut pas assurer les risques corrélés.

L'État force les assureurs à accepter les assurances pour des risques corrélés. Il peut arriver que l' assureur fasse faillite, c'est mauvais pour l'assuré car il ne va pas nous rembnourser.IL y a un deuixème niveau : la réassurance, les assureurs eux même s'assurent sur le marché de la réassurance auprès de réassureurs, ce sont des compagnies d'assurance encore plus grosses (*exemple : AXA plus grande compagnie d'assurance française et LLOYD's Londres, compagnie de réassurance*)

Deux aspects d'assurance :

- **la demande d'assurance (de la part des particuliers)**

⇒ *Comment les consommateurs vont-ils demander de l'assurance ? Quel est le taux de couverture qu'ils sont prêts à accepter ? Quel prix sont-ils prêts à payer ?*

- **l'offre d'assurance (de la part des compagnies d'assurances et de mutuelles)**

La compagnie d'assurance crée des profits, à la fin de l'année, elle regarde sa rentabilité et les profits seront distribués aux actionnaires.

La mutuelle crée des gains, elle les redistribue en fin d'année à tous les mutualisés, à tous les assurés (sous forme de baisse de cotisations les années suivantes). Ce n'est pas les actionnaires qui reçoivent des bénéfices.

Les mutuelles n'ont pas de ressources financières très importantes, elles ont peut être moins sûres que les compagnies d'assurance en termes d'assise financière.

Exemple d'assurance

On suppose qu'un agent peut subir un sinistre (accident de voiture/incendie de la maison) et sur un objet de valeur v.

Avec probabilité q, le sinistre a lieu, avec probabilité $1 - q$, il n'a pas lieu.

En s'assurant à un niveau z, l'agent reçoit une indemnité égale à z en cas de sinistre.

On peut avoir $z = v$ mais on aura jamais $z > v$.

Il paye une prime d'assurance proportionnelle à l'indemnité βz. Cela vient de l'idée que c'est comme un consommateur qui consomme, s'il consomme x unités de banane, le prix total qu'il va payer est : xp

L'assurance s'interprète donc comme une loterie :

$$(q, 1-q), (z - \beta z, v - \beta z)$$

On suppose qu'un agent a une fonction d'utilité moyenne-variance de Markowitz :

$$u(x) = E(x) - kVar(x).$$

On écrit donc son espérance d'utilité :

$$\begin{aligned} U &= q(z-\beta z) + (1-q)(v-\beta z) \\ &\quad -k[q(1-q)^2(v-z)^2 + (1-q)q^2(v-z)^2] \\ &= qz + (1-q)v - \beta z - kq(1-q)(v-z)^2. \end{aligned}$$

z est la variable de contrôle, c'est par rapport à z qu'il faut qu'on dérive la fonction.

On calcule z en fonction de tous les autres paramètres: q, v, β, k

On suppose $q \leq \beta$ (sinon la compagnie d'assurance fait des pertes en moyenne..)
On calcule

$$\frac{\partial U}{\partial z} = q - \beta + 2kq(1-q)(v-z).$$

Si l'individu est riscophile ($k < 0$), alors $\frac{\partial U}{\partial z} = 0$: la demande d'assurance est nulle.
Si l'individu est riscophobe ($k > 0$), alors la demande d'assurance est donnée par:

$$z = v - \frac{q-\beta}{2kq(1-q)}$$

Si $q = \beta$ (marché de l'assurance compétitif), la demande d'assurance est complète: $z = v$

Erreur slide ⇒ $\beta - q$ au numérateur !

$q < \beta$ car si q est plus grand que β, l'espérance de gain pour la compagnie d'assurance serait négatif car q représente la probabilité qu'elle devra rembourser.

$q = \beta \Rightarrow$ on est dans un marché concurrentiel.

Si on est dans un marché d'assurance concurrentiel, cela sera toujours le cas que la demande d'assurance sera une demande d'assurance complète.

Si un individu a du goût pour le risque, il ne va jamais s'assurer.

Si un individu est neutre au risque, on n'a pas d'assurance ($k = 0$).

Il faut de l'aversion pour le risque pour choisir de s'assurer donc $k > 0$.

On fait de la statique comparative, comment les changements de paramètres influencent notre variable :

- Si q augmente, on ne sait pas.
- Si β augmente, z va diminuer
- Si v augmente, z augmente
- Si k augmente, z augmente

$$z = v + \frac{q-\beta}{2kq} = v - \frac{\beta - q}{2kq(1-q)}$$

La demande d'assurance

On étudie maintenant un modèle général de demande d'assurance.

Un individu riscophobe a des préférences données par la fonction d'utilité concave $u(.)$ et une richesse initiale w.

il possède en plus un actif v soumis à un sinistre.

Il subit une perte de X% de la valeur de l'actif où X est une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $(0, 1)$ avec une fonction de densité $f(x)$ et une fonction de répartition $F(x)$.

On n'est plus dans un monde où on perd 100% de la valeur ou on gagne 100% de la valeur car le % de valeur que l'on perd est lui-même une variable aléatoire.

Police d'assurance

En l'absence d'assurance, la richesse de l'agent est :

$$W = \omega + v(1 - X).$$

$1 - X \Rightarrow$ ce qu'il nous reste dans le cadre d'un sinistre.

La police d'assurance propose :

- le montant de l'indemnité en cas de sinistre
- La prime d'assurance à payer.

L'indemnité d'assurance

L'indemnité est une fonction du dommage subi :

$$I = g(vX),$$

Si notre appartement a été détruit à hauteur de 10%, l'assurance ne va pas nous rembourser à hauteur de 20%.

- $g(x) \leq x$ (l'indemnité est inférieure à la valeur du bien
- $g'(x) \geq 0$ (l'indemnité est croissante dans la valeur du bien)

- On suppose $I = avX$, où $a \in (0, 1]$ est le **taux de couverture**

Dans la réalité, la plupart des contrats d'assurance nous proposent une indemnité qui est un pourcentage du sinistre que l'on a subi.

$a \Rightarrow$ % de la valeur du sinistre que l'on va récupérer.

si $a = 1$, on demande une assurance complète du sinistre.

La prime d'assurance

La prime d'assurance, notée p est une fonction de l'indemnité.

Pour que la compagnie d'assurance ne fasse pas de perte on doit avoir :

$$p \geq E(I),$$

Si $p = E(I)$, c'est un marché d'assurance concurrentiel, la compagnie d'assurance ne fait pas de profit.

On suppose $p = (1 + \lambda)E(I)$ où $\lambda \geq 0$ est le *taux de charge*

λ ⇒ le prix de l'assurance pour un assuré.

Le profit de la compagnie d'assurance est alors :

$$\Pi = \lambda E(I).$$

Le prix d'une prime d'assurance a l'air d'être linéaire, proportionnel à l'indemnité que l'on reçoit.

La demande d'assurance

On a donc une prime d'assurance :

$$p = (1 + \lambda)avE(X)$$

et un niveau de richesse égal à :

$$W(a) = \omega + v(1 - X) + avX - (1 + \lambda)avE(X)$$

λ , $a,\ v\ et\ E(X)$ sont des variables non aléatoires.

X est variable aléatoire **<u>continue</u>**.

L'individu choisit le taux de couverture a pour maximiser

$$\begin{aligned}
EU(W(a)) &= EU(\omega + v(1-X) + av(X) - (1+\lambda)avE(X)),\\
&= \int_0^1 u(\omega + v(1-x) + avx - (1+\lambda)avE(x))f(x)dx.
\end{aligned}$$

sous la contrainte: $0 \leq a \leq 1$.

$$\int_0^1 u\,[w + v(1-x) + a\,[vx - (1+\lambda)\,v\,E(x)]]\; f(x)\, dx$$

dérivé $\rightarrow$ $$\int_0^1 [vx - (1+\lambda)\,v\,E(x)]\; \underbrace{u'(w + v(1-x) + a\,[vx - (1+\lambda)\,v\,E(x)])}_{\substack{\text{si l'individu est}\\ \text{neutre au risque,}\\ = k \text{ (constante).}}}\; f(x)dx$$

Si neutralité au risque; $u'(x) = k \quad \forall x$.

$$\int_0^1 (vx - (1+\lambda)\,v\,E(x))\; k\; f(x)\, dx$$

$\Rightarrow k \int_0^1 vx\; f(x)\, dx \; - \; k\,(1+\lambda)\,v\,E(x).$

$\Rightarrow k\,v\,E(x) - k\,(1+\lambda)\,v\,E(x)$

$= \cancel{k\,v\,E(x)} - \cancel{k\,v\,E(x)} - \lambda k\,v\,E(x)$

$\Rightarrow \boxed{-\lambda k\,v\,E(x)} \leq 0$

On calcule:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 EU(W(a))}{\partial a^2} &= \int_0^1 [v(x - (1+\lambda)E(x))]^2\\
&\quad u''(\omega + v(1 - x + ax) - (1+\lambda)avE(x))f(x)dx.
\end{aligned}$$

Comme la fonction d'utilité $u(x)$ est concave,

$$\frac{\partial^2 EU(W(a))}{\partial a^2} < 0$$

Au point $a = 0$,

$$\frac{\partial EU(W(a))}{\partial a} = \int_0^1 v(x - (1+\lambda)E(x)) \\ u'(\omega + v(1-x))f(x)dx.$$

Au point $a = 1$,

$$\frac{\partial EU(W(a))}{\partial a} = \int_0^1 v(x - (1+\lambda)E(x)) \\ u'(\omega + v - (1+\lambda)vE(x))f(x)dx.$$

Si $a = 0$, $\frac{\partial U}{\partial a} = \int_0^1 [vx - (1+\lambda)vE(x)]\, u'(\omega + v(1-x)\, f_x dx$

Si $a = 1$, $\frac{\partial U}{\partial a} = \int_0^1 [vx - (1+\lambda)vE(x)]\, u'(\omega + v - (1-x)vE(x)]\, f_x dx$

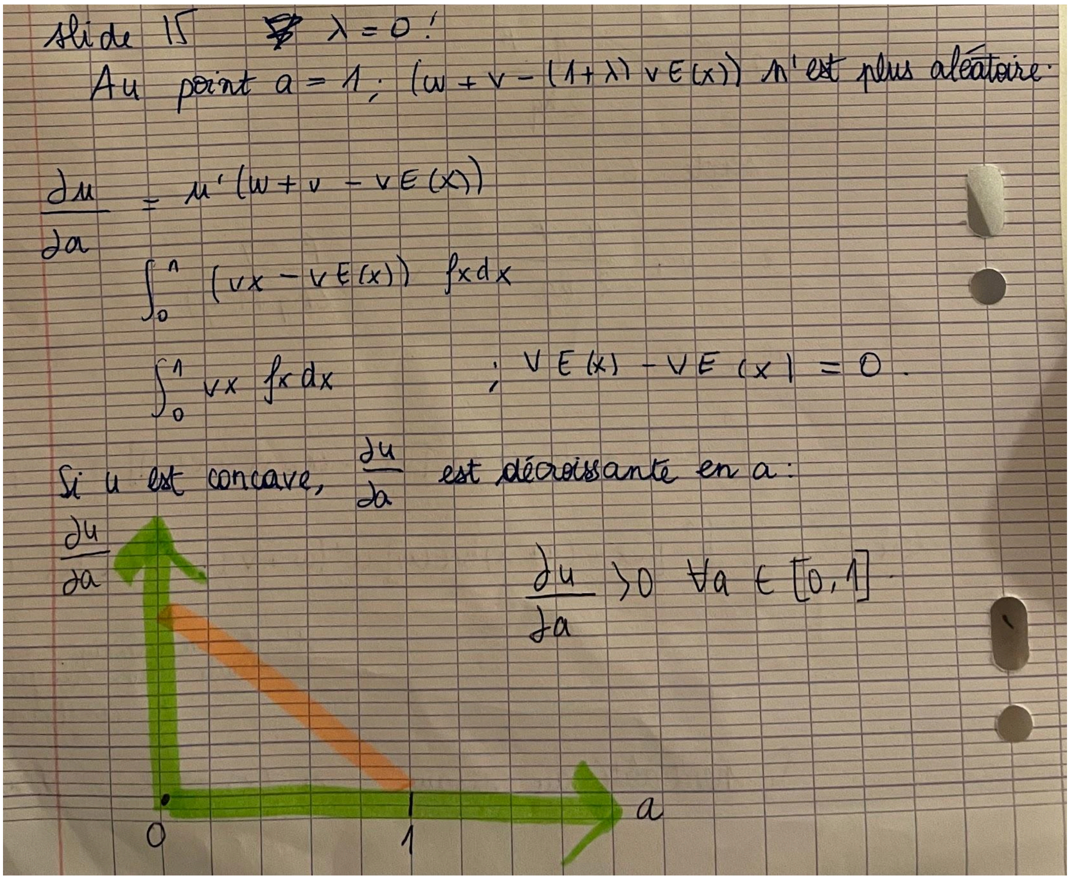
Marché d’assurance concurrentiel

Dans un marché concurrentiel, $\lambda = 0$. On a alors: $\int_0^1 xf(x)dx = E(x)$ et au point $a = 1$,

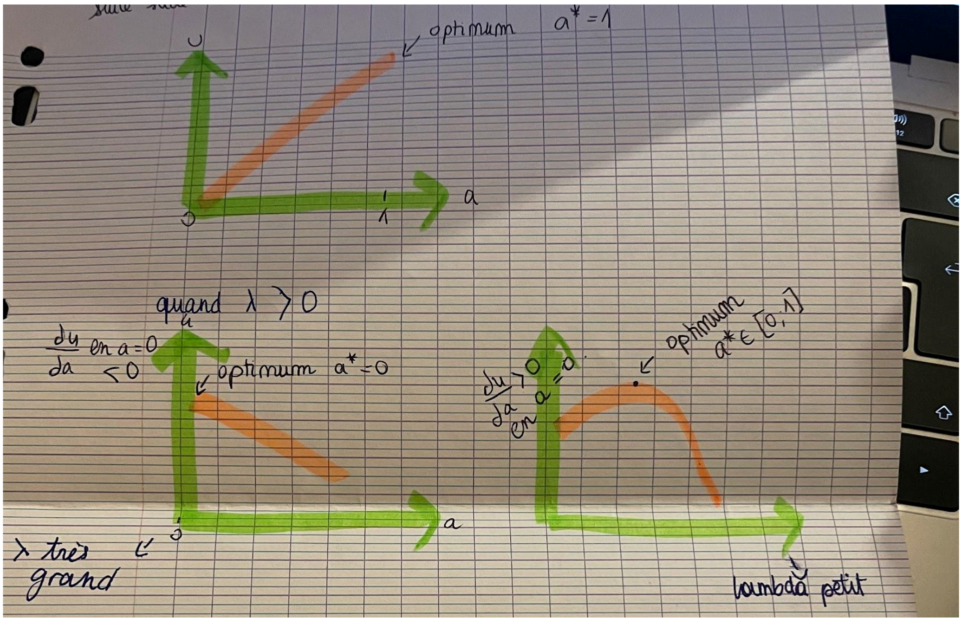
$$\frac{\partial EU(W(a))}{\partial a} = u'(\omega + v - (1+\lambda)vE(x)) \\ \int_0^1 v(x - E(x))f(x)dx \\ = 0.$$

On en déduit que *dans un marché concurrentiel,* $\frac{\partial EU(W(a))}{\partial a} \geq 0$ *pour tout* $a \in (0,1]$.

La demande d’assurance est complète : chaque individu demandera un taux de couverture égal à 1.



L'utilité est partout croissante en a. l'utilité de l'argent qui va s'assurer pour toute valeur de a, va avoir une valeur positive. il va toujours vouloir s'assurer plus.Il va vouloir augmenter son niveau de couverture, son niveau d'assurance.



Si on a une fonction d'utilité convexe, on va toujours avoir un niveau d'assurance qui sera nul donc un taux de couverture qui vaut 0.

Dans le cas ou λ = 0 je sais que la dérivé de l'espérance d'utilité par rapport à a, vaut 0 au point où a=1. Quand l'individu a de l'aversion au risque et que la dérivé est décroissante en a, partout ailleurs, la fonction est positive donc l'individu va choisir a = 1.

Marché d'assurance non concurrentiel

Sur un marché d'assurance non-concurrentiel au point $a = 1$:

Comme $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial EU(W(a))}{\partial a} &= u'(\omega + v - (1+\lambda)vE(x)) \\ &\quad \int_0^1 v(x - (1+\lambda)E(x))f(x)dx \\ &< 0.\end{aligned}$$

et le taux de couverture optimal est plus petit que 1 (voire égal à 0 si λ est trop grand......)

Quand $\lambda >$ 0, voir feuille , deux cas de figure (lambda très grand et lambda petit)

λ = 0 ⇒ la fonction est partout croissante donc l'optimum est $a^* = 1$.

λ > 1 pour λ très grand ⇒ optimum en $a^* = 0$.

λ > 1 pour λ petit ⇒ optimum avec a^* $compris\ entre$ 0 et 1.

Cela vaut pour une fonction concave.

$a^* = 0$ quand la fonction est convexe

$a^* = 0$ quand la fonction est convexe partout sauf quand λ = 0 .

Application

X est une variable aléatoire discrète : $X = 1$: accident, $X = 0$: pas d'accident.

X suit une loi de Bernoulli de paramètre p : probabilité d'accident égale à p.

Fonction d'utilité :

$$u(x) = x - \beta x^2.$$

Questions :

1. Calculez le taux de couverture optimal a^*
2. Comment a^* varie-t-il avec le taux de charge λ?
3. Comment a^* varie-t-il avec la valeur de la voiture v?
4. Comment a^* varie-t-il avec le paramètre β?
5. Comment a^* varie-t-il avec la probabilité ρ?

On calcule:

$$\begin{aligned} W(a) &= v(1 - X + aX) - (1 + \lambda avE(X)), \\ &= v(1 - X + aX) - (1 + \lambda)av\rho) \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} EU(W(a)) &= (1-\rho)[(v - (1+\lambda)av\rho) - \beta(v - (1+\lambda)av\rho)^2] \\ &+ \rho[(av - (1+\lambda)av\rho) - \beta(av - (1+\lambda)av\rho)^2] \\ &= v(1 - \rho - \lambda a\rho) \\ &- \beta v^2(1-\rho)(1-(1+\lambda)a\rho)^2 \\ &- \beta v^2\rho(a - (1+\lambda)a\rho)^2. \end{aligned}$$

En posant $\frac{\partial EU(W(a))}{\partial a} = 0$, on trouve:

$$a^* = \frac{1-\rho}{1-\rho+\rho\lambda^2} - \frac{\lambda}{2\beta v(1-\rho+\rho\lambda^2)}.$$

a^* diminue avec λ

a^* augmente avec v

a^* augmente avec β

Pas de relation claire entre a^* et ρ

$X : 0$ avec proba $1-p$ $\quad$ $v \rightarrow$ valeur de la voiture

$X : 1$ avec proba p $\quad$ $u(v) = \log(v)$

$$W(a) = V(1 - X + aX) + (1-\lambda)\, a v p$$

$$(1-p) \log\left[v - (1+\lambda) a v p\right] + p \log\left[a v - (1+\lambda) a v p\right].$$

$$- \frac{(1-p)(1+\lambda) v p}{v - (1+\lambda) a v p} + p \frac{(1-(1+\lambda) v p)}{a v - (1+\lambda) a v p} = 0$$

$$(1-p)(1+\lambda) v p\, a v \left[1 - (1+\lambda) p\right] = p v (1 - (1+\lambda) p) \left[v - (1+\lambda) a v p\right].$$

$$\Rightarrow a v (1+\lambda)(1-p) = v - (1+\lambda) a v p$$

$$\Rightarrow a v (1+\lambda) = v \quad \Rightarrow \quad a^* = \frac{v}{v(1+\lambda)}$$

Offre d'assurance

Il existe plusieurs types de compagnie d'assurance :

- les **compagnies privées** dont l'objectif est de maximiser le profit
- les **mutuelles** qui reversent les bénéfices aux assurés.

Les mutuelles reversent les bénéfices aux assurés (elles le font de façon indirecte en baissant les cotisations).

Mutuelles et compagnies privées

Les mutuelles proposent des prix plus bas $\lambda = 0$, mais n'ont pas toujours la capacité financière pour assurer tous les risques (risque de faillite). Un moment a été très favorable aux assurances, c'était le moment du confinement, baisse vertigineuse du nombre d'accidents de voitures, bénéfices records pour les compagnies d'assurances.

Les compagnies privées ajustent les primes pour pouvoir faire face à toute éventualité et ont moins de chance de faire faillite.

Aléa moral et sélection adverse

Toutes les compagnies d'assurance font face à deux difficultés.

Ce sont deux mots qui viennent de l'assurance.

- **<u>Sélection adverse</u>**

L'idée de sélection verse est que : qui va vouloir s'assurer ? ceux qui en ont le plus besoin. Si on a une assurance santé, les premiers à souscrire à cette assurance, ce sont les gens malades. l'assurance santé ne va pas pouvoir réaliser des profits puisque les individus qui y sont vont coûter beaucoup. C'est le problème de sélection adverse, les agents économiques qui ont un risque le plus élevé sont ceux qui se dirigent en premier vers les assurances.

Exemple : aux USA, la première année de permis nécessite une assurance auprès de l'État car la probabilité d'accident est plus élevée durant la première année de conduire, si bien que les compagnies d'assurance privés refusent de les assurer. C'est un effet de sélection adverse, l'État a dû intervenir.

Pour une compagnie d'assurance,il est important d'être capable d'évaluer le risque auquel l'assuré fait face. Les compagnies d'assurance font attention au risque des individus. Le risque de santé pose un vrai problème car l'accès des compagnies d'assurances à des données de santé est problématique.

On ne peut pas identifier le risque d'un individu, ils ont des risques différents qui vont être une caractéristique de chacun des individus. C'est quelque chose d'endogène, les individus ne le choisissent pas.

Exemple : extension de garantie sur les machines à laver de Carrefour, on peut avoir une garantie qui va jusqu'à 5 ans au lieu de 1 ou 2 ans, on demande aux gens de choisir une assurance avec extension de garantie et une assurance sans extension de garantie. C'est pour découvrir véritablement le risque de chaque agent.

C'est comme cela que les compagnies d'assurance résolvent le problème de sélection adverse, en proposant des contrats différents.

- **Aléa moral**

C'est l'idée selon laquelle, par son propre comportement, l'individu va changer le risque qu'il propose.

Exemple : Si on a une assurance contre l'incendie, ça va nous inciter à fumer au lit.

La compagnie d'assurance comprend que l'on va avoir une attitude plus risquée après avoir pris l'assurance plutôt qu'avant.

Pour résoudre ce problème, par exemple dans le cas d'une assurance vie, si on se suicide dans le mois qui suti, l'assurance vie ne sera pas payée.

Contrats, aléa moral, sélection adverse

Pour distinguer entre différents types d'individus, les compagnies d'assurance proposent non pas un seul contrat mais un menu de contrat avec :

- différents taux de couverture
- différents taux de charge
- différentes règles de franchise

Les individus choisissent alors les contrats qu'ils préfèrent.
L'offre d'assurance n'est donc pas l'offre d'un bien uniforme, mais l'offre d'un menu de contrats..